Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования

«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

ЗАДАЧИ

физико-математических олимпиад «Phystech.International» 2018

Учебно-методические разработки
по физике и математике

Москва
МФТИ
2019

УДК 53
ББК 22.3
З61

З61 **Задачи физико-математической олимпиады «Phystech.International» 2018.** (Учебно-методические разработки по физике и математике). // Чивилёв В.И., Усков В.В., Шеронов А.А., Юрьев Ю.В., Плис В.И., Агаханов Н.Х., Глухов И.В., Городецкий С.Е., Подлипский О.К. – М.: МФТИ, 2019. – 51 с.

Приведены задачи, предлагавшиеся на заключительном этапе олимпиады «Phystech.International» в декабре 2018 г. (2017–2018 учебный год).

Все задачи снабжены ответами, часть — подробными решениями.

Предназначены для абитуриентов МФТИ и других технических вузов, а также для преподавателей школ с углубленным изучением физики и математики.

УДК 53
ББК 22.3

Содержание

Условия задач

Ответы и решения

ФИЗИКА

БИЛЕТ 1, 9 класс

1. Перед перекрёстком грузовик тормозит до полной остановки в течение $T = 5$ с, в середине тормозного пути его скорость $V = 2$ м/с.

1) Найдите величину (модуль) a ускорения автомобиля в процессе торможения.

2) Найдите длину S тормозного пути грузовика.

В процессе торможения грузовик движется по прямой, ускорение грузовика постоянно по величине и направлению.

2. Теннисист тренируется на горизонтальной площадке, посылая мяч к вертикальной стенке. После удара ракеткой мяч летит практически с уровня земли и через $\tau_1 = 1{,}5$ с ударяется в стенку. Через $\tau_2 = 0{,}5$ с после упругого соударения со стенкой мяч падает на площадку на расстоянии $S = 8$ м от стенки.

1) На какой максимальной высоте H находился мяч в полёте?

2) На каком расстоянии L от стенки начался полёт мяча?

3) Найдите скорость V_0 ракетки перед ударом.

Масса ракетки во много раз больше массы мяча. Соударение мяча и ракетки упругое. В момент удара мяч покоится. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Мяч движется в вертикальной плоскости перпендикулярной стенке.

3. Пробковый шарик прикреплён нитью к дну сосуда с водой. Объём шарика V. Плотность воды ρ, плотность пробки $0{,}2 \cdot \rho$. Ускорение свободного падения g.

1) Найдите величину T_1 силы натяжения нити, если сосуд неподвижен.

2) Найдите величину T_2 силы натяжения нити в случае движения сосуда по горизонтальной поверхности с постоянным по величине и направлению ускорением $a = 0{,}5g$.

В обоих случаях шарик полностью погружен в воду и не касается стенок.

4. В сосуд, содержащий $m_1 = 10$ кг воды при $t_1 = 20$ °C, вводится $m_2 = 0{,}2$ кг пара при $t_2 = 100$ °C. Найдите температуру t_3 воды в сосуде после установления теплового равновесия. Удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг. Считайте теплоёмкость сосуда и потери теплоты пренебрежимо малыми.

5. Шесть одинаковых вольтметров соединены как показано на рисунке и присоединены к источнику постоянного напряжения $U = 40$ В. Сопротивление каждого вольтметра $R = 20 \cdot 10^3$ Ом.

1) Найдите величину I_5 тока, текущего через вольтметр 5.

2) Найдите показание V_3 вольтметра 3.

3) Найдите показание V_1 вольтметра 1.

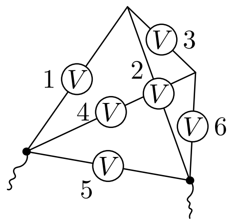


Рис. к задаче 5

БИЛЕТ 2, 9 класс

1. Автомобиль движется по горизонтальной дороге со скоростью $V_0 = 8$ м/с. Перед перекрёстком автомобиль тормозит до полной остановки в течение $T = 4$ с.

1) Найдите длину S тормозного пути автомобиля.

2) С какой скоростью V двигался автомобиль в тот момент, когда он прошёл $\frac{15}{16}$ тормозного пути?

В процессе торможения автомобиль движется по прямой, ускорение автомобиля постоянно по величине и направлению.

2. Футболист тренируется на горизонтальной площадке, посылая мяч к гладкой вертикальной стенке. После удара мяч летит практически с уровня земли и через $\tau_1 = 0{,}4$ с ударяется в стенку. Через $\tau_2 = 1{,}6$ с после упругого соударения со стенкой мяч падает на площадку на расстоянии $S = 20$ м от стенки.

1) На какой высоте H мяч ударился в стенку?

2) На каком расстоянии L от точки старта мяч падает на площадку?

3) Найдите среднюю силу $\langle F \rangle$, с которой футболист в процессе удара действует на мяч.

Продолжительность удара $\Delta t = 0{,}05$ с, масса мяча $m = 0{,}5$ кг. Перед ударом мяч покоится. Ускорение свободного падения $g =$

$= 10$ м/с^2. Мяч движется в вертикальной плоскости перпендикулярной стенке.

3. Резиновый воздушный шарик прикреплён нитью к дну неподвижного сосуда с водой и полностью погружен в воду. Сила натяжения нити T_1. Плотность воды ρ, ускорение свободного падения g.

1) Найдите объём V шарика. Массу шарика с воздухом считайте пренебрежимо малой. Если сосуд перемещают по горизонтальной поверхности с постоянным по величине и направлению ускорением, то сила натяжения нити становится равной T_2.

2) Найдите величину a ускорения, с которым движется сосуд.

В процессе движения шарик полностью погружен в воду и не касается стенок.

4. В калориметр, содержащий $V = 5$ л воды при температуре $t_1 = 90$ °C, опустили кусок льда массой $m = 1$ кг при температуре $t_2 = -10$ °C. Найдите температуру t в калориметре после установления теплового равновесия. Удельная теплоёмкость льда $c_1 = 2100$ Дж/(кг·К), удельная теплоёмкость воды $c_2 = 4200$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг. Плотность воды $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3. Температура плавления льда $t_0 = 0$ °C. Считайте теплоёмкость калориметра и потери теплоты пренебрежимо малыми.

5. Шесть одинаковых амперметров соединены как показано на рисунке и присоединены к источнику постоянного напряжения. Сопротивление каждого амперметра $R = 1$ Ом. Амперметр 5 показывает величину тока $I = 5$ А.

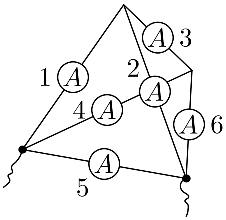


Рис. к задаче 5

1) Найдите напряжение U на источнике.

2) Найдите показание I_3 амперметра 3.

3) Найдите показание I_4 амперметра 4.

БИЛЕТ 1, 10 класс

1. С задней линии теннисного корта с высоты $H = 2$ м теннисист подаёт мяч, скорость которого направлена горизонтально. Длина корта $L = 20$ м, высота сетки $h = 1$ м. Пролетев над сеткой, мяч попадает в корт.

1) Найдите продолжительность T полёта мяча.

2) При какой минимальной начальной скорости V_0 мяч перелетит через сетку?

3) В этом случае на каком расстоянии S от сетки мяч попадёт в корт?

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Мяч движется в вертикальной плоскости перпендикулярной сетке. Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой.

2. В системе, изображённой на рисунке, массы грузов 1, 2, 3 равны соответственно $m_1 = m = 0{,}1$ кг, $m_2 = 2m$, $m_3 = 3m$.

1) Найдите силу T_1 натяжения нити, на которой подвешен груз 3.

2) Найдите ускорение a_1 а груза 1.

3) Найдите силу T_2 натяжения нити, на которой подвешен верхний блок.

4) Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Грузы 1 и 2 прикреплены к нитям. Блоки лёгкие. Нерастяжимые нити скользят по блокам без трения.

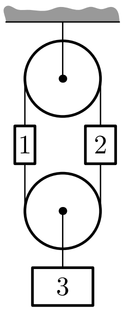


Рис. к задаче 2

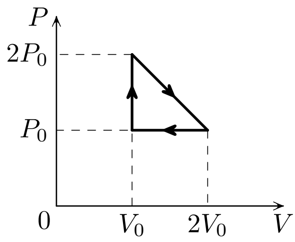


Рис. к задаче 3

3. С одноатомным идеальным газом проводят цикл (см. рис.), $P_0 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Па. $V_0 = 2{,}0 \cdot 10^{-3}$ м^3, количество вещества $\nu = 2$ моль, молярная масса газа $\mu = 40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

1) Найдите работу A газа за цикл.

2) Найдите минимальную среднеквадратичную скорость $V_{\min}$ атомов газа в цикле.

3) На сколько процентов в этом цикле максимальная среднеквадратичная скорость больше минимальной?

Среднеквадратичная скорость $V = \sqrt{\langle V^2 \rangle}$, где $\langle V^2 \rangle$ — среднее в расчёте на один атом значение квадрата скорости.

4. Две маленьких бусинки, заряженных равными по величине и знаку зарядами q, расположены на внутренней поверхности гладкой непроводящей сферы радиуса R. Первая бусинка закреплена в нижней точке сферы, а вторая может свободно скользить по её поверхности. В положении равновесия эта бусинка находится на высоте $h = 0{,}5 \cdot R$, отсчитанной от нижней точки сферы.

1) Найдите величину F силы электрического взаимодействия зарядов.

2) Найдите массу m подвижной бусинки.

Ускорение свободного падения g и электрическая постоянная ε_0 известны.

5. Если к батарее подключить сопротивление $R = 50$ Ом, то в цепи течёт ток силой I. При подключении к этой же батарее сопротивления R, соединённого последовательно с неизвестным сопротивлением $\tilde{R}$, в цепи течёт ток силой $0{,}75 \cdot I$. Если же сопротивление R соединить параллельно с сопротивлением $\tilde{R}$ и подключить к этой же батарее, то через неё будет течь ток силой $1{,}2 \cdot I$. Найдите сопротивление $\tilde{R}$.

БИЛЕТ 2, 10 класс

1. С задней линии волейбольной площадки с высоты H волейболист подаёт мяч. Начальная скорость мяча направлена горизонтально. Через $T = 0{,}8$ с мяч, пролетев над сеткой, попадает в площадку. Длина площадки $L = 18$ м, верхний край сетки находится на высоте $h = 2{,}4$ м.

1) На какой высоте H начался полёта мяча?

2) При какой минимальной начальной скорости V_0 мяч перелетит через сетку?

3) В этом случае на каком расстоянии S от сетки мяч попадёт в площадку?

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Мяч движется в вертикальной плоскости перпендикулярной сетке. Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой.

2. В системе, изображённой на рисунке, массы грузов 1, 2 и 3 равны соответственно $m_1 = m = 0{,}2$ кг, $m_2 = 2m$, $m_3 = 5m$.

1) Найдите силу T натяжения нити, на которой подвешен груз 3.

2) Найдите ускорение a_2 груза 2.

3) С какой по величине силой P верхний блок действует на ось?

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Грузы 1 и 2 прикреплены к нитям. Блоки лёгкие, трения в осях блоков нет. Нерастяжимые нити скользят по блокам без трения.

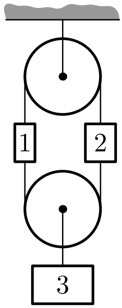


Рис. к задаче 2

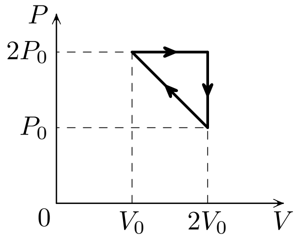


Рис. к задаче 3

3. С одноатомным идеальным газом проводят цикл (см. рис.), $P_0 = 2{,}0 \cdot 10^5$ Па. $V_0 = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ м^3, количество вещества $\nu = 0{,}5$ моль, молярная масса газа $\mu = 20 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

1) Найдите работу A газа в процессе сжатия.

2) Найдите минимальную среднеквадратичную скорость $V_{\min}$ атомов газа в цикле.

3) В процессе сжатия на сколько процентов максимальная среднеквадратичная скорость больше минимальной?

Среднеквадратичная скорость $V = \sqrt{\langle V^2 \rangle}$, где $\langle V^2 \rangle$ — среднее в расчёте на один атом значение квадрата скорости.

4. Две маленьких бусинки, заряженных равными по величине и знаку зарядами q, расположены на внутренней поверхности гладкой непроводящей сферы радиуса R. Первая бусинка закреплена в нижней точке сферы, а вторая может свободно скользить по её поверхности. В положении равновесия расстояние между бусинками равно R.

1) Найдите величину F силы электрического взаимодействия зарядов.

2) Найдите отношение $\eta = \dfrac{F}{mg}$ силы электрического взаимодействия к силе тяжести подвижной бусинки.

Ускорение свободного падения g и электрическая постоянная ε_0 известны.

5. Если к батарее подключить сопротивление $R = 125$ Ом, то в цепи течёт ток силой I. При подключении к этой же батарее сопротивления R, соединённого последовательно с неизвестным сопротивлением $\tilde{R}$, в цепи течёт ток $\dfrac{3}{5}\,I$. Если же сопротивление R соединить параллельно с сопротивлением $\tilde{R}$ и подключить к этой же батарее, то через неё будет течь ток $\dfrac{9}{8}\,I$. Найдите сопротивление $\tilde{R}$.

БИЛЕТ 1, 11 класс

1. Бруски массами $m_1 = m$ и $m_2 = 7m$ находятся на гладкой горизонтальной поверхности стола. К брускам прикреплена лёгкая упругая пружина жёсткостью k, сжатая на величину x (см. рис.). Брусок массой $7m$ удерживают неподвижно, другой брусок прижат к упору. Затем брусок массой $7m$ отпускают.

1) Найдите скорость бруска массой $7m$ в момент отрыва другого бруска от упора.

2) Найдите скорость бруска массой $7m$ при минимальном расстоянии между брусками в процессе их движения после отрыва от упора.

Рис. к задаче 1

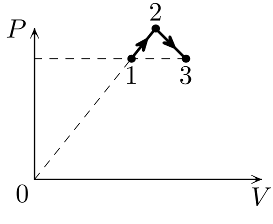


Рис. к задаче 3

2. Шар висит на упругой пружине и совершает колебания вдоль вертикали с амплитудой A и периодом T. Масса пружины намного меньше массы шара.

1) Найти максимальное ускорение (по модулю) шара.

2) Найти ускорение (по модулю) шара в те моменты, когда его скорость (по модулю) равна 2/3 от максимальной скорости (по модулю).

3. Гелий в количестве $\nu = 1$ моль расширяется сначала в процессе 1–2 прямо пропорциональной зависимости давления P газа от объёма V, а затем в процессе 2–3 линейной зависимости давления от объёма (см. рис.). Давления в состояниях 1 и 3 равны. Работа газа в процессе 2–3 в 1,25 раза больше работы в процессе 1–2. Температура в состояниях 2 и 3 одинакова и равна $T_2 = 200$ К.

1) Найти отношение объёмов газа в состояниях 2 и 1.

2) Найти работу газа A_{23} в процессе 2–3.

4. К источнику с постоянной ЭДС подключён плоский конденсатор. В конденсатор, не отключая источника, вставляют пластину из диэлектрика (см. рис.). Толщина пластины равна 3/4 от расстояния между обкладками конденсатора. В результате диэлектрик заполняет 3/4 объёма конденсатора и ёмкость конденсатора увеличивается в 3 раза.

1) Во сколько раз и как изменилась напряжённость электрического поля внутри конденсатора в области без диэлектрика?

2) Найти диэлектрическую проницаемость пластины.

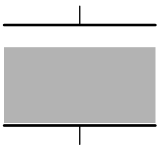


Рис. к задаче 4

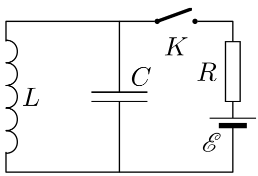


Рис. к задаче 5

5. В цепи, схема которой показана на рисунке, ключ K разомкнут. Указанные на схеме параметры известны, сопротивление катушки намного меньше сопротивления резистора. Ключ замыкают.

После достижения в цепи установившегося режима (все токи перестали изменяться) ключ размыкают.

1) Найти ток I_1 через конденсатор сразу после замыкания ключа.

2) Найти ток I_0 через катушку в установившемся режиме при замкнутом ключе.

3) Найти напряжение на конденсаторе после размыкания ключа в момент, когда ток через катушку первый раз станет $\frac{2}{3} I_0$.

БИЛЕТ 2, 11 класс

1. Бруски массами $m_1 = m$ и $m_2 = 5m$ находятся на гладкой горизонтальной поверхности стола. К брускам прикреплена лёгкая упругая пружина жёсткостью k, сжатая на величину x (см. рис.). Брусок массой $5m$ удерживают неподвижно, другой брусок прижат к упору. Затем брусок массой $5m$ отпускают.

1) Найдите скорость бруска массой $5m$ в момент отрыва другого бруска от упора.

2) Найдите скорость бруска массой $5m$ при максимальном расстоянии между брусками в процессе их движения после отрыва от упора.

Рис. к задаче 1

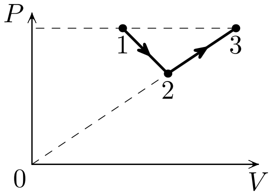


Рис. к задаче 3

2. Груз висит на упругой пружине и совершает колебания вдоль вертикали с амплитудой A и периодом T. Масса пружины намного меньше массы груза.

1) Найти максимальное ускорение (по модулю) груза.

2) Найти ускорение (по модулю) груза в те моменты, когда его скорость (по модулю) равна 3/4 от максимальной скорости (по модулю).

3. Гелий в количестве $\nu = 1$ моль расширяется сначала в процессе 1–2 линейной зависимости давления P газа от объёма V, а затем в процессе 2–3 прямо пропорциональной зависимости давления от объёма (см. рис.). Давления в состояниях 1 и 3 равны. Работа газа в процессе 2–3 в 1,5 раза больше работы в процессе 1–2. Температура в состояниях 1 и 2 одинакова и равна $T_1 = 200$ К.

1) Найти отношение объёмов газа в состояниях 2 и 1.

2) Найти работу газа A_{23} в процессе 2–3.

4. К источнику с постоянной ЭДС подключён плоский конденсатор. В конденсатор, не отключая источника, вставляют пластину из диэлектрика (см. рис.). Толщина пластины равна 2/3 от расстояния между обкладками конденсатора. В результате диэлектрик заполняет 2/3 объёма конденсатора и ёмкость конденсатора увеличивается в 2 раза.

1) Во сколько раз и как изменилась напряжённость электрического поля внутри конденсатора в области без диэлектрика?

2) Найти диэлектрическую проницаемость пластины.

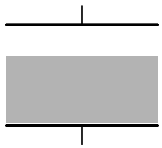


Рис. к задаче 4

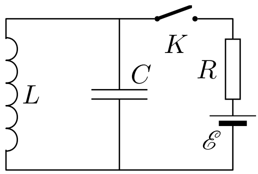


Рис. к задаче 5

5. В цепи, схема которой показана на рисунке, ключ K разомкнут. Указанные на схеме параметры известны, сопротивление катушки намного меньше сопротивления резистора. Ключ замыкают. После достижения в цепи установившегося режима (все токи перестали изменяться) ключ размыкают.

1) Найти ток I_1 через источник сразу после замыкания ключа.

2) Найти ток I_0 через источник в установившемся режиме при замкнутом ключе.

3) Найти напряжение на конденсаторе после размыкания ключа в момент, когда ток через катушку первый раз станет $\dfrac{3}{4}\,I_0$.

МАТЕМАТИКА

БИЛЕТ 1, 9 и 10 класс

1. Пассажир автобуса, выглянув в окно, замечает своего друга, идущего в противоположном направлении. Он выходит на ближайшей остановке, через 3 минуты после того, как увидел своего друга, и начинает идти в направлении, противоположном движению автобуса, чтобы догнать его. Сколько времени ему для этого потребуется (считая с момента выхода из автобуса), если он идёт в 2,5 раза быстрее друга, но в 6 раз медленнее автобуса? (Все скорости постоянны.)

2. Джек и Джилл обменивались марками дважды. При каждом обмене Джилл отдавала $\frac{2}{11}$ всех своих марок Джеку, а Джек отдавал половину своих марок Джилл (например, если у Джилл 11 марок, а у Джека 10, это означает, что Джилл передаст 2 марки Джеку, а Джек передаст 5 марок Джилл). Выяснилось, что после первого обмена у Джека было 110 марок, а после второго обмена у Джилл было 334 марки. Сколько марок было у Джилл до всех обменов?

3. Несократимая дробь, числитель и знаменатель которой являются натуральными числами, больше $\frac{1}{11}$. Если её знаменатель увеличить на 1, а её числитель увеличить на 6, то получающаяся дробь меньше 0,2. Найдите первоначальную дробь, если известно, что её знаменатель на 8 меньше квадрата её числителя.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy^3 - x = 182, \\ xy^2 - xy = 42. \end{cases}$

5. Периметр прямоугольного треугольника равен 30. Гипотенуза AB касается окружности, вписанной в этот треугольник, в точке Q, причём $AQ : QB = 10 : 3$. Найдите площадь треугольника.

6. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие неравенствам $x^2 + 16y + 193 < 24x - y^2$ и $38x - y^2 > x^2 + 8y + 354$.

7. KT — биссектриса треугольника KLM. Центр окружности Ω радиуса 6 расположен на стороне KM, при этом окружность Ω проходит через точки K, L и T. Найдите KL, если известно, что $LT : MT = 1 : 3$.

БИЛЕТ 2, 9 и 10 класс

1. Пассажир автобуса, выглянув в окно, замечает своего друга, идущего в противоположном направлении. Он выходит на ближайшей остановке, через 1,5 минуты после того, как увидел своего друга, и начинает идти в направлении, противоположном движению автобуса, чтобы догнать его. Сколько времени ему для этого потребуется (считая с момента выхода из автобуса), если он идёт в 1,8 раза быстрее друга, но в 11 раз медленнее автобуса? (Все скорости постоянны.)

2. Джек и Джилл обменивались марками дважды. При каждом обмене Джилл отдавала $\frac{3}{7}$ всех своих марок Джеку, а Джек отдавал треть своих марок Джилл (например, если у Джилл 14 марок, а у Джека 12, это означает, что Джилл передаст 6 марок Джеку, а Джек передаст 4 марки Джилл). Выяснилось, что после первого обмена у Джека было 273 марки, а после второго обмена у Джилл было 199 марок. Сколько марок было у Джилл до всех обменов?

3. Несократимая дробь, числитель и знаменатель которой являются натуральными числами, больше $\frac{1}{9}$. Если её знаменатель увеличить на 1, а её числитель увеличить на 3, то получающаяся дробь меньше 0,2. Найдите первоначальную дробь, если известно, что её знаменатель на 3 меньше квадрата её числителя.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + xy^3 = -70, \\ xy + xy^2 = 20. \end{cases}$

5. Периметр прямоугольного треугольника равен 40. Гипотенуза AB касается окружности, вписанной в этот треугольник, в точке Q, причём $AQ : QB = 5 : 12$. Найдите площадь треугольника.

6. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие неравенствам $x^2 + 26y + 159 < 4x - y^2$ и $18x - y^2 > x^2 + 18y + 140$.

7. KT — биссектриса треугольника KLM. Центр окружности Ω радиуса 6 расположен на стороне KM, при этом окружность Ω проходит через точки K, L и T. Найдите KL, если известно, что $LT : MT = 2 : 3$.

БИЛЕТ 1, 11 класс

1. Решите уравнение $x^4 \cdot 2^{11-x} + 2^{2+\sqrt{2x+2}} = x^4 \cdot 2^{\sqrt{2x+2}} + 2^{13-x}$.

2. Числа a, b и c (в указанном порядке) образуют геометрическую прогрессию. Числа $c-a$, $2a-b$ и $a+b$ (в указанном порядке) образуют арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

3. Найдите значение выражения $\cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$.

4. Найдите координаты точки M такой, что она лежит на оси Oy и касательные, проведённые к параболе $y = 7 - 5x - 3x^2$ из точки M, перпендикулярны друг другу.

5. Точка P лежит на стороне LM параллелограмма $KLMN$. Известно, что $LP = MP = 2$, $\angle KPN = \arccos\frac{11}{12}$, $KL = 9$. Найдите площадь этого параллелограмма.

6. Изобразите на плоскости множество точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} \log_{|y-2|-2|y-4|+6}(x+3) > \log_{|y-2|-2|y-4|+6}(1+y), \\ x < 13. \end{cases}$$

Найдите площадь этого множества.

7. Равнобедренные трапеции $APRS$ и $PQRS$, наибольшими основаниями которых являются PR и PS соответственно ($PR = PS$), вписаны в окружность Ω. Диагонали трапеции $PQRS$ пересекаются в точке O, угол POS равен 120°. Найдите радиус Ω, если известно, что площадь треугольника APS равна $4 + 4\sqrt{3}$.

БИЛЕТ 2, 11 класс

1. Решите уравнение $x^4 \cdot 3^{\sqrt{1-3x}} + 3^{x+11} = x^4 \cdot 3^{x+9} + 3^{2+\sqrt{1-3x}}$.

2. Числа a, b и c (в указанном порядке) образуют геометрическую прогрессию. Числа $3c-2a$, $a-b$ и $a-2c$ (в указанном порядке) образуют арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

3. Найдите значение выражения $\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$.

4. Найдите координаты точки M такой, что она лежит на оси Oy и касательные, проведённые к параболе $y = 1 + 6x - 4x^2$ из точки M, перпендикулярны друг другу.

5. Точка P лежит на стороне LM параллелограмма $KLMN$. Известно, что $LP = MP = 3$, $\angle KPN = \arccos\frac{8}{9}$, $KL = 5$. Найдите площадь этого параллелограмма.

6. Изобразите на плоскости множество точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} \log_{|x+2|-2|x+3|+4}(y-2) > \log_{|x+2|-2|x+3|+4}(1-x), \\ y < 13. \end{cases}$$

Найдите площадь этого множества.

7. Равнобедренные трапеции $APRS$ и $PQRS$, наибольшими основаниями которых являются PR и PS соответственно ($PR = PS$), вписаны в окружность Ω. Диагонали трапеции $APRS$ пересекаются в точке O, угол AOP равен 60°. Найдите радиус Ω, если известно, что площадь треугольника PQR равна $9 + 9\sqrt{3}$.

ФИЗИКА

Критерии оценивания задач

Заключительный этап олимпиады Phystech.International, 2018

Декабрь 2018 г.
Максимальная сумма баллов для каждой задачи — 10.

Билеты 1, 2 (9 класс)

Задача	Критерии оценивания	К-во очков
1.	1) Ответ на 1-й вопрос	5
	2) Ответ на 2-й вопрос	5
2.	1) Ответ на 1-й вопрос	3
	2) Ответ на 2-й вопрос	3
	3) Ответ на 3-й вопрос	4
3.	1) Ответ на 1-й вопрос	4
	2) Ответ на 2-й вопрос	6
4.	Правильно записано уравнение теплового баланса	7
	Ответ	3
5.	Приведена эквивалентная схема или есть её словесное описание	4
	1) Ответ на 1-й вопрос	2
	2) Ответ на 2-й вопрос	2
	3) Ответ на 3-й вопрос	2

Билеты 1, 2 (10 класс)

Задача	Критерии оценивания	К-во очков
1.	1) Ответ на 1-й вопрос	2
	2) Ответ на 2-й вопрос	4
	3) Ответ на 3-й вопрос	4
2.	1) Ответ на 1-й вопрос	2
	2) Ответ на 2-й вопрос	4
	3) Ответ на 3-й вопрос	4

3.	1) Ответ на 1-й вопрос	2
	2) Ответ на 2-й вопрос	2 очка (билет 1)
		6 очков (билет 2)
	3) Ответ на 3-й вопрос	6 очков (билет 1)
		2 очка (билет 2)
4.	1) Ответ на 1-й вопрос	5
	2) Ответ на 2-й вопрос	5
5.	Правильно записаны все уравнения	7
	Ответ	3

Билеты 1, 2 (11 класс)

Задача	Критерии оценивания	К-во очков
1.	1) Ответ на 1-й вопрос	5
	2) Ответ на 2-й вопрос	5
2.	1) Ответ на 1-й вопрос	3
	2) Ответ на 2-й вопрос	7
3.	Правильно записаны все необходимые уравнения	4
	1) Ответ на 1-й вопрос	3
	2) Ответ на 2-й вопрос	3
4.	1) Ответ на 1-й вопрос	5
	2) Ответ на 2-й вопрос	5
5.	1) Ответ на 1-й вопрос	3
	2) Ответ на 2-й вопрос	3
	3) Ответ на 3-й вопрос	4

ФИЗИКА

БИЛЕТ 1, 9 класс

1. $$\left.\begin{aligned} S &= \frac{aT^2}{2} \\ \frac{S}{2} &= \frac{V^2}{2a};\; S = \frac{V^2}{a} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = \sqrt{2}\,\frac{V}{T} = \sqrt{2}\,\frac{2}{5} \approx 0{,}57\ \text{м/с}^2$$

(см. рис. 1). $S = \dfrac{VT}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\cdot 5}{\sqrt{2}} \approx 7{,}1$ м.

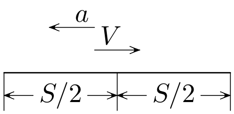


Рис. 1

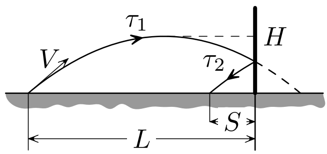


Рис. 2

2. $$H = \frac{g\left(\dfrac{\tau_1+\tau_2}{2}\right)^2}{2} = \frac{g(\tau_1+\tau_2)^2}{8} = \frac{10\cdot 4}{8} = 5\ \text{м}. \qquad (1)$$

$$V_x = \frac{S}{\tau_2}\,, \qquad (2)$$

$$L = V_x\tau_1\,. \qquad (3)$$

Из (2), (3): $L = \dfrac{S\tau_1}{\tau_2} = \dfrac{8\cdot 1{,}5}{0{,}5} = 24$ м,

$$H = \frac{V_y^2}{2}\,\frac{1}{g}\,. \qquad (4)$$

Из (1), (4): $V_y = g\,\dfrac{\tau_1+\tau_2}{2}\,.$ (5)

Из (2), (5):

$$V = \sqrt{V_x^2+V_y^2} = \sqrt{\left(\frac{S}{\tau_2}\right)^2 + \left[\frac{g(\tau_1+\tau_2)}{2}\right]^2},\quad V = V_0 + V_{\text{отн}} = 2V_0;$$

$$V_0 = \frac{1}{2}V = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{S}{\tau_2}\right)^2 + \left[\frac{g(\tau_1+\tau_2)}{2}\right]^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{8}{0{,}5}\right)^2 + \left(\frac{10\cdot 2}{2}\right)^2} = \sqrt{89} \approx 9{,}4\ \text{м/с}.$$

3. 1) $F_A = g\rho V\,.$ (1)

$F_A = T_1 + mg = T_1 + 0{,}2\rho V g\,.$ (2)

Из (1), (2): $T_1 = 0{,}8g\rho V$ (см. рис. 3а)). (3)

2) $g' = \sqrt{g^2 + a^2}$ (см. рис. 3б)).

Аналогично (3) получаем: $T_2 = 0{,}8g'\rho V = 0{,}8\sqrt{1{,}25}g\rho V \approx$ $\approx 0{,}9g\rho V$.

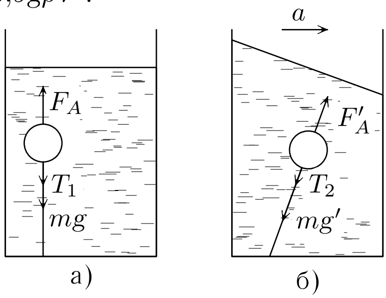


Рис. 3

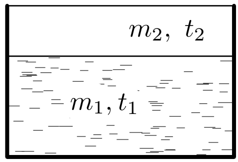


Рис. 4

4. Из уравнения теплового баланса:

$$m_2 r + m_2 c(t_2 - t_3) = m_1 c(t_3 - t_1)$$

получаем:

$$t_3 = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_2 r}{c(m_1 + m_2)} =$$

$$= \frac{10 \cdot 20 + 0{,}2 \cdot 100}{10 + 0{,}2} + \frac{0{,}2 \cdot 2{,}26 \cdot 10^6}{4200(10 + 0{,}2)} \approx 32\ ^\circ\text{C}.$$

5. Эквивалентная схема представлена на рис. 5.

1) $I_5 = \dfrac{U}{R} = \dfrac{40}{20 \cdot 10^3} = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{А} = 2\ \text{мА}.$

2) Из симметрии $V_3 = 0$.

3) $V_1 = \dfrac{1}{2}U = \dfrac{40}{2} = 20\ \text{В}.$

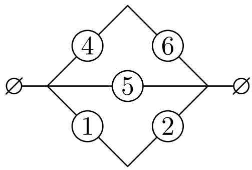


Рис. 5

БИЛЕТ 2, 9 класс

1. $S = \dfrac{aT^2}{2} = \dfrac{aT \cdot T}{2} = \dfrac{V_0 T}{2} = \dfrac{8 \cdot 4}{2} = 16\ \text{м}.$ (1)

$a = \dfrac{V_0}{T}$, $\dfrac{S}{16} = \dfrac{V^2}{2a} = \dfrac{V^2}{2(V_0/T)}$ (см. рис. 6).

С учётом (1): $V = \sqrt{\dfrac{SV_0}{8T}} = \dfrac{V_0}{4} = 2\ \text{м/с}.$

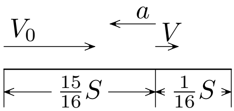


Рис. 6

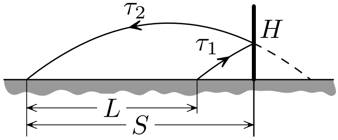


Рис. 7

2. $$H = \frac{g\left(\dfrac{\tau_1+\tau_2}{2}\right)^2}{2} = \frac{g(\tau_1+\tau_2)^2}{8} = \frac{10\cdot 4}{8} = 5\ \text{м}. \quad (1)$$

$$V_x = \frac{S}{\tau_2}\,, \quad (2)$$

$$S - L = V_x\tau_1 \ \text{(см. рис. 7)}. \quad (3)$$

Из (2), (3): $L = \left(1 - \dfrac{\tau_1}{\tau_2}\right)S = \left(1 - \dfrac{0{,}4}{1{,}6}\right)S = \dfrac{3}{4}\,S = 15$ м,

$$H = \frac{V_y^2}{2}\,\frac{1}{g}\,. \quad (4)$$

Из (1), (4): $V_y = \dfrac{g(\tau_1+\tau_2)}{2}\,.$ (5)

Из (2), (5): $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{\left(\dfrac{S}{\tau_2}\right)^2 + \left[\dfrac{g(\tau_1+\tau_2)}{2}\right]^2}\,.$

$$\langle F\rangle \Delta t = mV;$$

$$\langle F\rangle = \frac{mV}{\Delta t} = \frac{m}{\Delta t}\sqrt{\left(\frac{S}{\tau_2}\right)^2 + \left[\frac{g(\tau_1+\tau_2)}{2}\right]^2} =$$

$$= \frac{0{,}5}{0{,}05}\sqrt{\left(\frac{20}{1{,}6}\right)^2 + \left(\frac{10\cdot 2}{2}\right)^2} \approx 160\ \text{Н}.$$

3. 1) $F_A = g\rho V\,,$ (1)

$F_A = T_1\,.$ (2)

Из (1), (2): $T_1 = g\rho V\,;\ V = \dfrac{T_1}{g\rho}\,.$ (3)

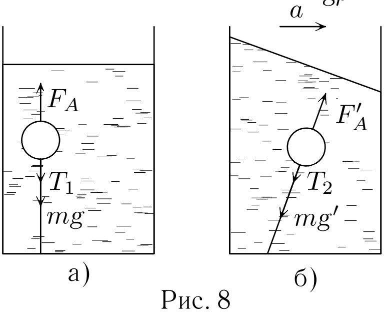


Рис. 8

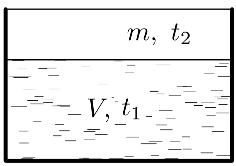


Рис. 9

2) $g' = \sqrt{g^2 + a^2}\,.$

Аналогично (3) получаем:

$$T_2 = g'\rho V = \sqrt{g^2 + a^2}\rho V \Rightarrow a = \sqrt{\left(\frac{T_2}{\rho V}\right)^2 - g^2}.$$

4. Из уравнения теплового баланса:

$$mc_1(t_0 - t_2) + \lambda m + mc_2(t - t_0) = \rho V c_2(t_1 - t)$$

получаем:

$$t = \frac{c_2\rho V t_1 + mc_1 t_2 - \lambda m}{c_2(\rho V + m)} =$$

$$= \frac{4200 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 90 + 1 \cdot 2100 \cdot (-10) - 3{,}3 \cdot 10^5 \cdot 1}{4200 \cdot (10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} + 1)} \approx 61\ ^\circ\text{C}.$$

5. Эквивалентная схема представлена на рис. 10.

1) $U = IR = 5B$.

2) Из симметрии $I_3 = 0$.

3) $I_4 = \dfrac{U}{2R} = \dfrac{IR}{2R} = \dfrac{I}{2} = 2{,}5$ A.

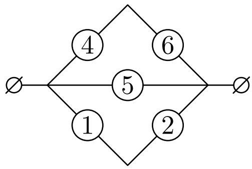


Рис. 10

БИЛЕТ 1, 10 класс

1. 1) $H = \dfrac{gT^2}{2} \Rightarrow T = \sqrt{\dfrac{2H}{g}} =$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{10}} \approx 0{,}63 \text{ с.} \qquad (1)$$

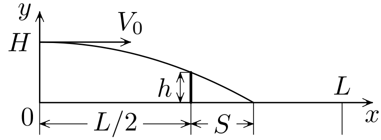


Рис. 11

2) t — время полёта мяча до сетки

$$\frac{L}{2} = V_0 t\,; \quad t = \frac{L}{2V_0}\,. \qquad (2)$$

$$h = H - \frac{gt^2}{2} = H - \frac{g}{2} \cdot \frac{L^2}{4V_0^2} = H - \frac{gL^2}{8V_0^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_0 = L\sqrt{\frac{g}{8(H-h)}} = 20\sqrt{\frac{10}{8 \cdot (2-1)}} \approx 22{,}4 \text{ м/с.} \qquad (3)$$

3) С учётом (1) и (3): $S = V_0 T - \dfrac{L}{2} = L\sqrt{\dfrac{g}{8(H-h)} \cdot \dfrac{2H}{g}} - \dfrac{L}{2}\,;$

$$S = \frac{L}{2}\left(\sqrt{\frac{H}{H-h}} - 1\right) = 10 \cdot (\sqrt{2} - 1) \approx 4{,}1 \text{ м.}$$

2. 1) $T_1 = m_3 g = 3mg = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 10 = 3$ Н. (1)

2) $m_1 a_1 = \dfrac{1}{2}(T_2 - T_1) - m_1 g\,.$ (2)

$m_2 a_1 = \dfrac{1}{2}(T_1 - T_2) + m_2 g\,.$ (3)

Из (2), (3):

$a_1 = \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\, g = \dfrac{g}{3} \approx 3{,}3$ м/с^2. (4)

3) (1), (4) → (2): $T_2 = \left(\dfrac{4 m_1 m_2}{m_1 + m_2} + m_3\right) g =$

$= \left(\dfrac{4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2}{0{,}3} + 0{,}3\right) \cdot 10 \approx 5{,}7$ Н.

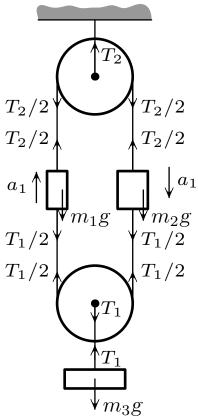


Рис. 12

3. 1) $A = \dfrac{1}{2} P_0 V_0 = \dfrac{10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{2} = 100$ Дж.

2) $P_0 V_0 = \nu R T_{\min}\,;\ T_{\min} = \dfrac{P_0 V_0}{\nu R}\,.$ (1)

С учётом (1): $v_{\min} = \sqrt{\dfrac{3RT_{\min}}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{3RP_0V_0}{\mu\nu R}} = \sqrt{\dfrac{3P_0V_0}{\mu\nu}} =$

$= \sqrt{\dfrac{3 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}} \approx 87$ м/с.

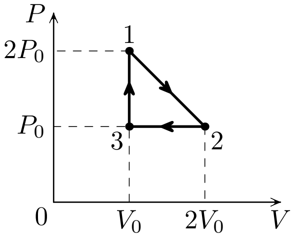


Рис. 13

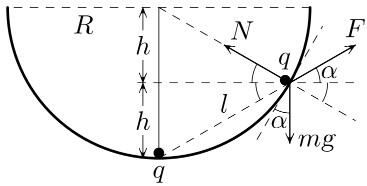


Рис. 14

3) На участке 1–2 (см. рис. 13): $P = 2P_0 - \dfrac{P_0}{V_0}(V - V_0) =$

$= -\dfrac{P_0}{V_0} V + 3P_0\,,\ \nu RT = PV = -\dfrac{P_0}{V_0} V^2 + 3P_0 V\,.$

$T_{\max}$ достигается при $V = \dfrac{3}{2} V_0\,,\ P = \dfrac{3}{2} P_0:\ \nu R T_{\max} =$

$= -\dfrac{P_0}{V_0} \cdot \dfrac{9}{4} V_0^2 + 3P_0 \dfrac{3}{2} V_0 = \dfrac{9}{4} P_0 V_0\,;$

$T_{\max} = \dfrac{9 P_0 V_0}{4 \nu R}\,.$ (2)

С учётом (2):

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{3RT_{\max}}{\mu}} = \sqrt{\frac{3R}{\mu} \cdot \frac{9P_0V_0}{4\nu R}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3P_0V_0}{\mu\nu}} = \frac{3}{2}v_{\min}$$

(увеличение на 50 %).

4. Из равенства прямоугольных треугольников следует, что $l = R$. $\sin\alpha = \dfrac{h}{R} = 0{,}5$; $\alpha = 30^\circ$ (см. рис. 14).

1) $F = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2} = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$.

2) $mg\cos\alpha = F\sin 2\alpha$, $m = \dfrac{F \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g\cos\alpha} = \dfrac{2F\sin\alpha}{g} = \dfrac{2F \cdot 0{,}5}{g} = \dfrac{F}{g}$.

5. Пусть r — внутреннее сопротивление батареи.

$$\frac{\mathscr{E}}{I} = r + R, \qquad (1)$$

$$\frac{\mathscr{E}}{I} = 0{,}75(r + R + \tilde{R}), \qquad (2)$$

$$\frac{\mathscr{E}}{I} = 1{,}2\left(r + \frac{R\tilde{R}}{R+\tilde{R}}\right). \qquad (3)$$

Из (1), (2): $r = 3\tilde{R} - R$. (4)

Из (1), (3): $R = 0{,}2r + 1{,}2\,\dfrac{R\tilde{R}}{R+\tilde{R}}$. (5)

Из (4), (5): $\tilde{R}^2 + R\tilde{R} - 2R^2 = 0$,

$$\tilde{R} = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 8R^2}}{2} = \frac{-R + 3R}{2} = R = 50 \text{ Ом}.$$

БИЛЕТ 2, 10 класс

1. 1) $H = \dfrac{gT^2}{2} = \dfrac{10 \cdot 0{,}8^2}{2} = 3{,}2$ м. (1)

2) t — время полёта мяча до сетки,

$\dfrac{L}{2} = V_0 t$; $t = \dfrac{L}{2V_0}$. (2)

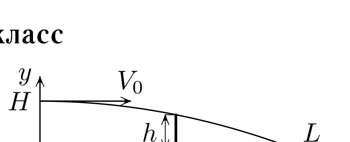


Рис. 15

$$h = H - \frac{gt^2}{2} = \frac{gT^2}{2} - \frac{g}{2} \cdot \frac{L^2}{4V_0^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{L}{2\sqrt{T^2 - \frac{2h}{g}}} = \frac{18}{2\sqrt{0{,}8^2 - \frac{2 \cdot 2{,}4}{10}}} = 22{,}5 \text{ м/с}. \qquad (3)$$

3) С учётом (3):

$$S = V_0T - \frac{L}{2} = \frac{LT}{2\sqrt{T^2 - \frac{2h}{g}}} - \frac{L}{2} =$$

$$= \frac{L}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2h}{gT^2}}} - 1\right) = \frac{18}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2\cdot 2{,}4}{10\cdot 0{,}8^2}}} - 1\right) = 9 \text{ м.}$$

2. 1) $T = m_3g = 5mg = 5\cdot 0{,}2\cdot 10 = 10\ \text{Н}.$ (1)

2) $m_1a_2 = \frac{1}{2}(T_1 - T) - m_1g\,,$ (2)

$m_2a_2 = \frac{1}{2}(T - T_1) + m_2g\,.$ (3)

Из (2), (3):

$a_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\,g = \frac{g}{3} \approx 3{,}3\ \text{м/с}^2.$ (4)

3) (1), (4) $\to$ (2):

$$P = T_1 = \left(\frac{4m_1m_2}{m_1+m_2} + m_3\right)g =$$

$$= \left(\frac{4\cdot 0{,}2\cdot 0{,}4}{0{,}6} + 1\right)\cdot 10 \approx 15{,}3\ \text{Н}.$$

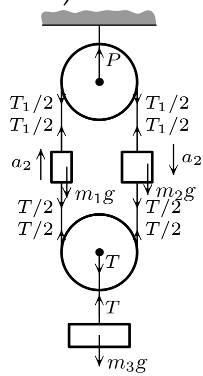


Рис. 16

3. 1) $A = A_{31} = -\frac{2P_0 + P_0}{2}V_0 = -\frac{3}{2}P_0V_0 = -\frac{3}{2}\cdot 2\cdot 10^5\cdot 10^{-3} =$
$= -300\ \text{Дж}.$

2) На участке 3—1: $P = 2P_0 - \frac{P_0}{V_0}(V - V_0) = -\frac{P_0}{V_0}V + 3P_0\,.$

$T_{\min}$ достигается при $V = \frac{3}{2}V_0\,,\ P = \frac{3}{2}P_0:\ \nu RT_{\min} =$
$= -\frac{P_0}{V_0}\cdot\frac{9}{4}V_0^2 + 3P_0\frac{3}{2}V_0 = \frac{9}{4}P_0V_0\,;$

$T_{\min} = \frac{9}{4}\,\frac{P_0V_0}{\nu R}\,.$ (1)

С учётом (1):

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{3RT_{\min}}{\mu}} = \sqrt{\frac{3R}{\mu}\frac{9}{4}\frac{P_0V_0}{\nu R}} =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3P_0V_0}{\nu\cdot\mu}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3\cdot 2\cdot 10^5\cdot 10^{-3}}{0{,}5\cdot 20\cdot 10^{-3}}} \approx 367\ \text{м/с}.$$

3) $T_{\max}$ достигается при $V = 2V_0$, $P = 2P_0$: $\nu RT_{\max} = 4P_0V_0$;
$T_{\max} = \dfrac{4P_0V_0}{\nu R}$,

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{3RT_{\max}}{\mu}} = \sqrt{\frac{3R}{\mu}\frac{4P_0V_0}{\nu R}} = 2\sqrt{\frac{3P_0V_0}{\mu\nu}}$$

$\dfrac{v_{\max}}{v_{\min}} = \dfrac{2}{3/2} = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}33$ (увеличение на ≈ 33 %).

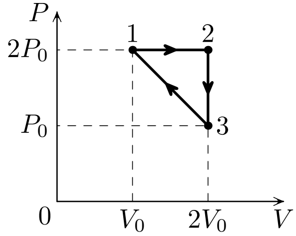


Рис. 17

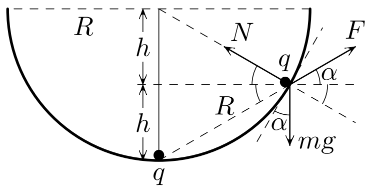


Рис. 18

4. Так как треугольник на рисунке равносторонний, то

$\alpha = \dfrac{1}{2}\,60^\circ = 30^\circ$. (1)

1) $F = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$.

2) $mg\cos\alpha = F\sin 2\alpha \Rightarrow \eta = \dfrac{F}{mg} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin 2\alpha} = \dfrac{1}{2\sin\alpha} =$

$= \dfrac{1}{2\cdot 0{,}5} = 1$.

5. Пусть r — внутреннее сопротивление батареи.

$\dfrac{\mathscr{E}}{I} = r + R$, (1)

$\dfrac{\mathscr{E}}{I} = \dfrac{3}{5}\,(r + R + \tilde{R})$, (2)

$\dfrac{\mathscr{E}}{I} = \dfrac{9}{8}\left(r + \dfrac{R\tilde{R}}{R+\tilde{R}}\right)$. (3)

Из (1), (2): $r = \dfrac{3}{2}\,\tilde{R} - R$. (4)

Из (1), (3): $R = 8R - 9\,\dfrac{R\tilde{R}}{R+\tilde{R}}$. (5)

Из (4), (5): $\tilde{R}^2 + R\tilde{R} - 6R^2 = 0$,

$$\tilde{R} = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 24R^2}}{2} = 2R = 2\cdot 125 = 250 \text{ Ом}.$$

БИЛЕТ 1, 11 класс

1. 1) В момент отрыва бруска m_1 пружина не деформирована.
ЗСЭ: $\dfrac{kx^2}{2} = \dfrac{m_2 v_2^2}{2} \Rightarrow v_2 = x\sqrt{\dfrac{k}{m_2}} = x\sqrt{\dfrac{k}{7m}}$. (1)

2) При минимальном расстоянии между брусками их скорость одинакова и равна v (см. рис. 19).
ЗСИ: $m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v$;
С учётом (1): $v = \dfrac{m_2}{m_1+m_2} v_2 = \dfrac{7}{8} x\sqrt{\dfrac{k}{7m}} = \dfrac{x}{8}\sqrt{\dfrac{7k}{m}}$.

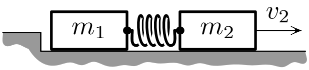


Рис. 19

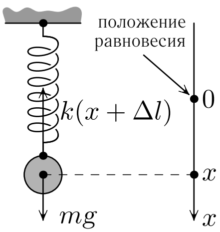


Рис. 20

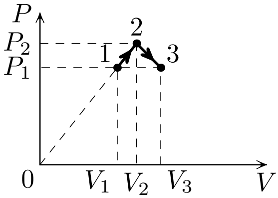


Рис. 21

2. 1) $mg = k\Delta l$ (Δl — деформация в положении равновесия) (см. рис. 20)

$$m\ddot{x} = -k(x+\Delta l) + mg = -kx,$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ где } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad (1)$$

$$x = A\cos(\omega_0 t); \quad \ddot{x} = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t), \qquad (2)$$

$$|a_{\max}| = \omega_0^2 A = \frac{4\pi^2}{T^2}A.$$

2) $\dot{x} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t)$,

$$v = \frac{2}{3}v_{\max} \text{ при } \sin(\omega_0 t) = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos(\omega_0 t) = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}. \quad (3)$$

$$(3)\to(2): \quad \ddot{x} = -\omega_0^2 A\,\frac{\sqrt{5}}{3}; \ |a| = \frac{\sqrt{5}}{3}\,\omega_0^2 A = \frac{\sqrt{5}}{3}\,\frac{4\pi^2}{T^2}\,A.$$

3. Пусть $\dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{V_2}{V_1} = \alpha$.

$$A_{12} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)(V_2 - V_1) = \\ = \frac{1}{2}(P_1V_2 - P_1V_1 + P_2V_2 - P_2V_1) = \frac{R}{2}(T_2 - T_1), \qquad (1)$$

$$A_{23} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)(V_3 - V_2) = \frac{1}{2}(P_1V_3 - P_1V_2 + P_2V_3 - P_2V_2) = \\ = \frac{1}{2}(\alpha RT_3 - \alpha RT_1) = \frac{\alpha R}{2}(T_2 - T_1). \qquad (2)$$

Из (1), (2): $\dfrac{A_{23}}{A_{12}} = \dfrac{5}{4} = \alpha$. (3)

$\dfrac{V_2}{V_1} = \alpha = \dfrac{5}{4}$, $RT_1 = P_1V_1 = \dfrac{P_2}{\alpha} \cdot \dfrac{V_2}{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha^2} RT_2$;

$T_1 = \dfrac{T_2}{\alpha^2} = \dfrac{16}{25} T_2$. (4)

(3), (4) $\to$ (2):

$$A_{23} = \frac{5R}{4 \cdot 2}\left(T_2 - \frac{16}{25} T_2\right) = \frac{9}{40} RT_2 = \frac{9}{40} \cdot 8{,}31 \cdot 200 = 374 \text{ Дж}.$$

4. Начальная ёмкость: $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d_0}$. (1)

Во 2-ом случае конденсатор с пластиной эквивалентен двум по-

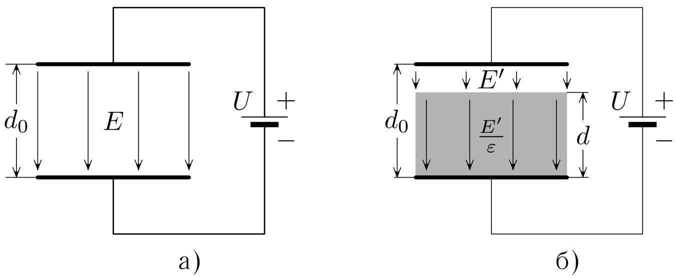


Рис. 22

следовательно соединённым конденсаторам (см. рис. 22).

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{\varepsilon_0 \dfrac{S}{d_0/4}} + \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{S}{3d_0/4}} \Rightarrow C' = \frac{4}{3+\varepsilon}\varepsilon\varepsilon_0 \frac{S}{d_0}. \qquad (2)$$

Из (1), (2): $C'/C = \dfrac{4\varepsilon}{3+\varepsilon} = 3 \Rightarrow 4\varepsilon = 9 + 3\varepsilon$; $\varepsilon = 9$. (3)

$$Ed_0 = E'\frac{d_0}{4} + \frac{E'}{\varepsilon}\cdot\frac{3}{4}d_0 = \frac{E'd_0}{4} + \frac{E'}{9}\cdot\frac{3}{4}d_0 \Rightarrow E' = 3E.$$

5. 1) Сразу после замыкания ключа ток через катушку равен нулю $\Rightarrow I_1 = \mathscr{E}/R$ (см. рис. 23а)).

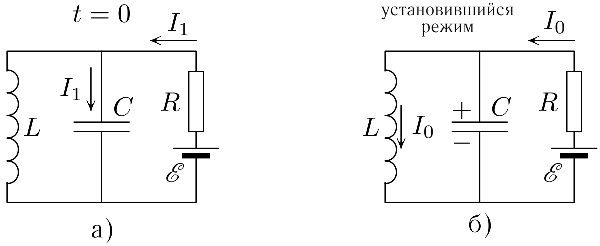


Рис. 23

2) В установившемся режиме (см. рис. 23б)): $I_0 = \mathscr{E}/R$. (1)

3) ЗСЭ: $\dfrac{LI_0^2}{2} = \dfrac{CU_C^2}{2} + \dfrac{L\left(\frac{2}{3}I_0\right)^2}{2}$. (2)

(1)$\to$(2): $L\dfrac{\mathscr{E}^2}{R^2} = CU_C^2 + L\,\dfrac{4}{9}\,\dfrac{\mathscr{E}^2}{R^2}$, $U_C = \dfrac{\sqrt{5}\mathscr{E}}{3\cdot R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

БИЛЕТ 2, 11 класс

1. 1) В момент отрыва бруска m_1 пружина не деформирована.

ЗСЭ: $\dfrac{kx^2}{2} = \dfrac{m_2v_2^2}{2} \Rightarrow v_2 = x\sqrt{\dfrac{k}{m_2}} = x\sqrt{\dfrac{k}{5m}}$. (1)

2) При максимальном расстоянии между брусками их скорость одинакова и равна v (см. рис. 24).

ЗСИ: $m_2v_2 = (m_1+m_2)v$;

$$v = \frac{m_2}{m_1+m_2}v_2 = \frac{5}{6}x\sqrt{\frac{k}{5m}} = \frac{x}{6}\sqrt{\frac{5k}{m}}.$$

2. 1) $mg = k\Delta l$ (Δl — деформация в положении равновесия) (см. рис. 25), $m\ddot{x} = -k(x+\Delta l) + mg = -kx$,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,\ \text{где}\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (1)$$

$$x = A\cos(\omega_0 t);\quad \ddot{x} = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t),\ (2)|a_{\max}| = \omega_0^2 A = \frac{4\pi^2}{T^2}A.$$

2) $\dot{x} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t)$, $v = \dfrac{3}{4}\, v_{\max}$ при $\sin(\omega_0 t) = \dfrac{3}{4} \Rightarrow$

$$\cos(\omega_0 t) = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}\,. \tag{3}$$

$$(3)\to(2)\text{: } \ddot{x} = -\omega_0^2 A\,\frac{\sqrt{7}}{4}\,;\ |a| = \frac{\sqrt{7}}{4}\,\omega_0^2 A = \frac{\sqrt{7}}{4}\,\frac{4\pi^2}{T^2}\,A\,.$$

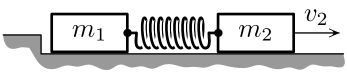


Рис. 24

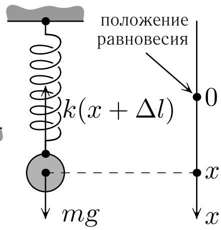


Рис. 25

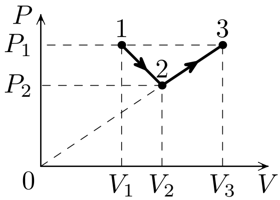


Рис. 26

3. Пусть $\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{V_3}{V_2} = \alpha$ (см. рис. 26).

$$RT_3 = P_1V_3 = \alpha P_2 \cdot \alpha V_2 = \alpha^2 RT_1 \Rightarrow T_3 = \alpha^2 T_1\,. \tag{1}$$

$$A_{12} = \frac{1}{2}\,(P_1+P_2)(V_2-V_1) =$$

$$= \frac{1}{2}\,(P_1V_2 - P_1V_1 + P_2V_2 - P_2V_1) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\alpha RT_2 - \frac{1}{\alpha}\,RT_1\right) = \frac{RT_1}{2}\,\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\,. \tag{2}$$

$$A_{23} = \frac{1}{2}\,(P_1+P_2)(V_3-V_2) = \frac{1}{2}\,(P_1V_3 - P_1V_2 + P_2V_3 - P_2V_2) =$$

$$= \frac{1}{2}\,(RT_3 - \alpha RT_2 + \frac{1}{\alpha}\,RT_3 - RT_2) = \frac{R(\alpha+1)}{2}\left[\frac{T_3}{\alpha} - T_1\right]. \tag{3}$$

$$\text{Из (2), (3): } \frac{A_{23}}{A_{12}} = \frac{3}{2} = \frac{T_3 - dT_1}{\alpha T_1 - T_1} = \frac{\alpha^2-\alpha}{\alpha-1} = \alpha\,;\ \alpha = \frac{3}{2}\,. \tag{4}$$

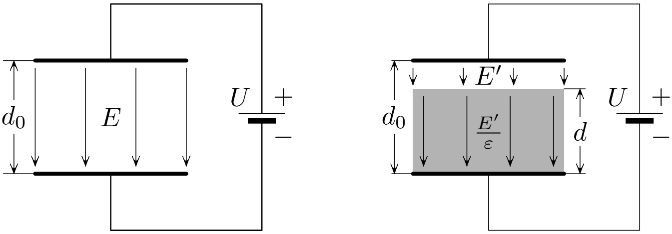
$$P_1V_1 = P_2V_2 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2} = \alpha = \frac{3}{2}\,.$$

(1), (4) → (3):

$$A_{23} = \frac{R\left(\dfrac{3}{2}+1\right)}{2}\left[\frac{3}{2}T_1 - T_1\right] = \frac{5}{8}RT_1 = \frac{5}{8}\cdot 8{,}31\cdot 200 \approx 1039\ \text{Дж}.$$

4. Начальная ёмкость: $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d_0}\,.$ (1)

Во 2-ом случае конденсатор с пластиной эквивалентен двум по-



а) б)

Рис. 27

следовательно соединённым конденсаторам.

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{\varepsilon_0\,\dfrac{S}{d_0/3}} + \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\,\dfrac{S}{2d_0/3}} \Rightarrow C' = \frac{3}{2+\varepsilon}\varepsilon\varepsilon_0\frac{S}{d_0}\,. \qquad (2)$$

Из (1), (2): $C'/C = \dfrac{3\varepsilon}{2+\varepsilon} = 2 \Rightarrow 3\varepsilon = 4 + 2\varepsilon\,;\ \ \varepsilon = 4\,.$ (3)

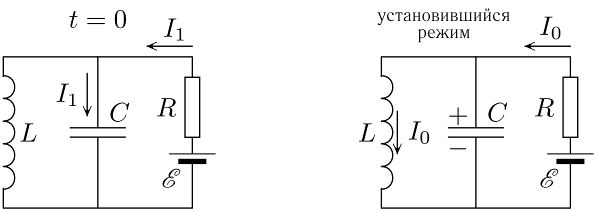
$$Ed_0 = E'\frac{d_0}{3} + \frac{E'}{\varepsilon}\cdot\frac{2}{3}d_0 = \frac{E'd_0}{3} + \frac{E'}{4}\cdot\frac{2}{3}d_0 \Rightarrow E' = 2E.$$

5. 1) Сразу после замыкания ключа ток через катушку равен нулю $\Rightarrow I_1 = \mathscr{E}/R$ (см. рис. 28а)).

2) В установившемся режиме (см. рис. 28б)): $I_0 = \mathscr{E}/R\,.$ (1)

3) ЗСЭ: $\dfrac{LI_0^2}{2} = \dfrac{CU_C^2}{2} + \dfrac{L\left(\dfrac{3}{4}\,I_0\right)^2}{2}\,.$ (2)

(1)$\to$(2): $L\,\dfrac{\mathscr{E}^2}{R^2} = CU_C^2 + L\,\dfrac{9}{16}\,\dfrac{\mathscr{E}^2}{R^2}\,,\ U_C = \dfrac{\sqrt{7}\mathscr{E}}{4\cdot R}\cdot\left(\dfrac{L}{C}\right).$



а) б)

Рис. 28

МАТЕМАТИКА

Критерии оценивания задач

Заключительный этап олимпиады Phystech.International, 2018

Декабрь 2018 г.

Максимальная сумма баллов для каждой задачи обозначена **полужирным** шрифтом.

Билеты 1 и 2 (9 и 10 классы)

Задача	Критерии оценивания	К-во очков
1.		**4**
2.		**5**
	Составлена система уравнений	3
3.		**5**
	Составлена система неравенств	2
4.		**5**
	Получено и решено квадратное уравнение относительно y	3
5.		**5**
	Получено квадратное уравнение относительно неизвестной длины	3
6.		**5**
	Выделены полные квадраты	2
7.		**8**
	Использовано свойство биссектрисы	1
	Применена теорема синусов (или соответствующий признак подобия треугольников)	1
	Найдена тригонометрическая функция угла KLM (или его половины)	3

Билеты 1 и 2 (11 класс)

Задача	Критерии оценивания	К-во очков
1.		**5**
	Уравнение разложено на множители	2
	Оба уравнения решены правильно (без учёта области определения функции)	1
	Корни, принадлежащие области определения функции, выбраны верно	2
2.		**5**
	Использованы характеристические свойства *обоих* прогрессий	2
3.		**5**
	Ошибка в тригонометрической формуле .... **0** очков за всю задачу	
4.		**6**
	Выписано условие перпендикулярности прямых ($k_1k_2 = -1$)	1
	Выписано условие касания прямой $y = kx + b$ параболы (т.е. соответствующий дискриминант должен быть равен 0) ...... 2 очка (за одно или 2 уравнения)	
5.		**7**
	Получено алгебраическое уравнение относительно *одной* неизвестной тригонометрической функции, которое может быть сведено к квадратному	4
6.		**7**
	Найдена область определения функции	1
	Найдены интервалы, для которых основание логарифма больше 1	2
	Сделан чертёж множества	3
	Найдена площадь множества	1
7.		**7**
	Найдены углы треугольника PQR (не менее двух)	3

МАТЕМАТИКА

БИЛЕТ 1, 9 и 10 класс

1. ***Ответ.*** 32 минуты.

Решение. Пусть v — скорость друга. Тогда скорость пассажира автобуса, когда он идёт пешком, равна $2{,}5v$, а скорость автобуса равна $6\cdot 2{,}5v = 15v$. Спустя 3 минуты, которые проходят после того, как пассажир увидел своего друга, расстояние между ними становится равно $3\cdot(15v+v) = 48v$. Когда пассажир начинает догонять своего друга, он сокращает расстояние между ними на $1{,}5v$ каждую минуту. Итак, всего ему необходимо $\frac{48v}{1{,}5v} = 32$ минуты.

2. ***Ответ.*** 363.

Решение. Пусть первоначальные количества марок у Джека и Джилл равны соответственно x и y. Тогда после первого обмена у Джека окажется $\frac{1}{2}x + \frac{2}{11}y$ марок, а у Джилл — $\left(\frac{1}{2}x + \frac{9}{11}y\right)$ марок. Во время второго обмена Джек отдаёт $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{2y}{11}\right)$ марок и получает $\frac{2}{11}\left(\frac{1}{2}x + \frac{9}{11}y\right)$. Отсюда количество марок у Джека становится равным $\frac{15}{44}x + \frac{29}{121}y$. Поскольку общее количество марок не меняется, у Джилл оказывается $x + y - \left(\frac{15}{44}x + \frac{29}{121}y\right) = \frac{29}{44}x + \frac{92}{121}y$ марок. Из условия получаем, что $\frac{1}{2}x + \frac{2}{11}y = 110$, а $\frac{29}{44}x + \frac{92}{121}y = 334$. Следовательно, $x = 88$, $y = 363$.

3. ***Ответ.*** $\frac{11}{113}$.

Решение. Пусть числитель дроби равен k. Тогда её знаменатель есть k^2-8. Известно, что $\frac{k}{k^2-8} > \frac{1}{11}$, а $\frac{k+6}{k^2-7} < \frac{1}{5}$. Поскольку знаменатель дроби положителен, а её числитель является целым числом, можно сделать вывод, что $k \geqslant 3$. Следовательно, можно умножить обе части первого неравенства на *положительное* выражение $11\left(k^2-8\right)$, а обе части второго — на *поло-*

жительное выражение $5\left(k^2-7\right)$; таким образом приходим к системе

$$\begin{cases} k^2-11k-8<0, \\ k^2-5k-37>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{11-\sqrt{153}}{2} \leqslant k < \dfrac{11+\sqrt{153}}{2}, \\ k \in \left(-\infty; \dfrac{5-\sqrt{173}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{5+\sqrt{173}}{2}; +\infty\right). \end{cases}$$

Принимая во внимание, что k — целое число, большее 2, из первого неравенства получаем, что $3 \leqslant k \leqslant 11$, а из второго — что $k \geqslant 10$. Пересекая эти ограничения, находим, что $k=10$ или $k=11$. Если $k=10$, данная в условии дробь равна $\frac{10}{92}$, то есть она сократима на 2. Если $k=11$, то дробь равна $\frac{11}{113}$, что является несократимой дробью. Это единственный вариант, удовлетворяющий условию задачи.

4. ***Ответ.*** $(7;3)$, $\left(-189; \frac{1}{3}\right)$.

Решение. Для начала раскладываем на множители левые части обоих уравнений:

$$\begin{cases} x(y-1)\left(1+y+y^2\right)=182, \\ xy(y-1)=42. \end{cases}$$

Ввиду того, что правые части уравнений отличны от нуля (а левые части равны им), можем почленно разделить первое уравнение на второе. В результате $\frac{1+y+y^2}{y}=\frac{13}{3}$, $3y^2-10y+3=0$, поэтому, $y=3$ или $y=\frac{1}{3}$. Подставляя эти значения в первое уравнение исходной системы, находим соответствующие значения x:

– если $y=3$, то $9x-3x=42 \Longleftrightarrow x=7$;

– если $y=\frac{1}{3}$, то $\frac{x}{9}-\frac{x}{3}=42 \Longleftrightarrow x=-189$.

5. ***Ответ.*** 30.

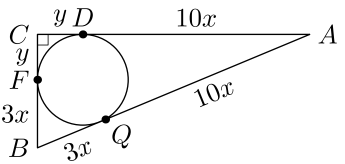


Рис. 1

Решение. Обозначим точки касания вписанной окружности со сторонами AC и BC как D и F соответственно (см. рис. 1). Пусть $AQ = 10x$, $CD = y$. Так как $AQ : QB = 10 : 3$, находим, что $BQ = 3x$.

Мы также получаем, что $AD = AQ = 10x, CF = CD = y, BF = BQ = 3x$ ввиду того, что отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны между собой. Поскольку периметр треугольника равен 30, справедливо соотношение $2y + 26x = 30$, $y = 15 - 13x$. Значит, $AC = 10x + y = 15 - 3x$, $BC = 3x + y = 15 - 10x$, $AB = 3x + 10x = 13x$. Тогда по теореме Пифагора $(15 - 3x)^2 + (15 - 10x)^2 = (13x)^2 \iff 2x^2 + 13x - 15 = 0$, и, следовательно, $x = 1$ или $x = -\dfrac{15}{2}$. Отрицательное значение x не подходит. Таким образом, $x = 1$, $AC = 12$, $BC = 5$, $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC = 30$.

6. ***Ответ.*** $(15; -6)$.

Решение. Выделяя полные квадраты, получаем

$$\begin{cases} (x-12)^2 + (y+8)^2 < 15, \\ (x-19)^2 + (y+4)^2 < 23. \end{cases}$$

Так как квадраты неотрицательны, из этих неравенств следует, что $(x-12)^2 < 15$, а $(x-19)^2 < 23$. Единственное целое значение x, удовлетворяющее этим неравенствам — это $x = 15$. Подставляем его в систему, которая принимает вид $\begin{cases} (y+8)^2 < 6, \\ (y+4)^2 < 7 \end{cases}$. Единственное целое значение y, подходящее сюда — это $y = -6$. Итак, получилась единственная пара целых чисел $(15; -6)$, которая удовлетворяет данным неравенствам.

7. ***Ответ.*** 8.

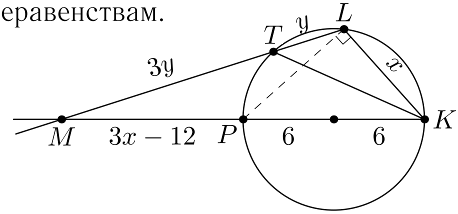


Рис. 2

Решение. Пусть $LT = y$. Тогда $MT = 3y$. Так как KT — биссектриса треугольника, $KL : KM = LT : MT = y : 3y = 1 : 3$ (см. рис. 2). Пусть $KL = x$, тогда $KM = 3x$. ML и MK — две секущие, проведённые к окружности из одной точки; следовательно, $MT \cdot ML = MK \cdot MP$ (P — точка пересечения отрезка KM с окружностью), т.е. $3y \cdot 4y = 3x \cdot (3x - 12) \iff 4y^2 = 3x^2 - 12x$. Поскольку KP — диаметр, он виден из точки L под прямым углом, а, значит, $\cos\angle LKP = \frac{KL}{KP} = \frac{x}{12}$. Тогда по теореме косинусов для треугольника KLM получаем, что $(4y)^2 = x^2+(3x)^2-2\cdot x\cdot 3x\cdot \frac{x}{12}$. Подставляя сюда выражение для $4y^2$, найденное выше, приходим к уравнению $12x^2-48x = 10x^2-\frac{1}{2}x^3 \iff x(x-8)(x+12) = 0$. У этого уравнения единственный положительный корень — это $x = 8$. Значит, $KL = x = 8$.

БИЛЕТ 2, 9 и 10 класс

1. ***Ответ.*** 39 минут.

Решение. Пусть v — скорость друга. Тогда скорость пассажира автобуса, когда он идёт пешком, равна $1{,}8v$, а скорость автобуса равна $11\cdot 1{,}8v = 19{,}8v$. Спустя 1,5 минуты, которые проходят после того, как пассажир увидел своего друга, расстояние между ними становится равно $1{,}5\cdot(19{,}8v+v) = 31{,}2v$. Когда пассажир начинает догонять своего друга, он сокращает расстояние между ними на $0{,}8v$ каждую минуту. Итак, всего ему необходимо $\frac{31{,}2v}{0{,}8v} = 39$ минут.

2. ***Ответ.*** 147.

Решение. Пусть первоначальные количества марок у Джека и Джилл равны соответственно x и y. Тогда после первого обмена у Джека окажется $\frac{2}{3}x+\frac{3}{7}y$ марок, а у Джилл — $\left(\frac{1}{3}x+\frac{4}{7}y\right)$ марок. Во время второго обмена Джек отдаёт $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{7}y\right)$ марок и получает $\frac{3}{7}\left(\frac{1}{3}x+\frac{4}{7}y\right)$. Отсюда количество марок у Джека становится равным $\frac{37}{63}x+\frac{26}{49}y$. Поскольку общее количество марок не меняется, у Джилл оказывается $x+y-\left(\frac{37}{63}x+\frac{26}{49}y\right) = \frac{26}{63}x+\frac{23}{49}y$ марок. Из условия получаем, что $\frac{2}{3}x+\frac{3}{7}y = 273$, а $\frac{26}{63}x+\frac{23}{49}y = 199$. Следовательно, $x = 315$, $y = 147$.

3. ***Ответ.*** $\frac{8}{61}$.

Решение. Пусть числитель дроби равен k. Тогда её знаменатель есть k^2-3. Известно, что $\dfrac{k}{k^2-3}>\dfrac{1}{9}$, а $\dfrac{k+3}{k^2-2}<\dfrac{1}{5}$. Поскольку знаменатель дроби положителен, а её числитель является целым числом, можно сделать вывод, что $k\geqslant 2$. Следовательно, можно умножить обе части первого неравенства на *положительное* выражение $9\left(k^2-3\right)$, а обе части второго — на *положительное* выражение $5\left(k^2-2\right)$; таким образом приходим к системе

$$\begin{cases} k^2-9k-3<0, \\ k^2-5k-17>0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{9-\sqrt{93}}{2}<k<\dfrac{9+\sqrt{93}}{2}, \\ k\in\left(-\infty;\dfrac{5-\sqrt{93}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{5+\sqrt{93}}{2};+\infty\right). \end{cases}$$

Принимая во внимание, что k — целое число, большее 1, из первого неравенства получаем, что $2\leqslant k\leqslant 9$, а из второго — что $k\geqslant 8$. Пересекая эти ограничения, находим, что $k=8$ или $k==9$. Если $k=9$, данная в условии дробь равна $\dfrac{9}{78}$, то есть она сократима на 3. Если $k=8$, то дробь равна $\dfrac{8}{61}$, что является несократимой дробью. Это единственный вариант, удовлетворяющий условию задачи.

4. ***Ответ.*** $(10;-2)$, $\left(-80;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Решение. Для начала раскладываем на множители левые части обоих уравнений:

$$\begin{cases} x(1+y)\left(1-y+y^2\right)=-70, \\ xy(1+y)=20. \end{cases}$$

Ввиду того, что правые части уравнений отличны от нуля (а левые части равны им), можем почленно разделить первое уравнение на второе. В результате $\dfrac{1-y+y^2}{y}=-\dfrac{7}{2}$, $2y^2+5y+2=0$, поэтому, $y=-2$ или $y=-\dfrac{1}{2}$. Подставляя эти значения в первое уравнение исходной системы, находим соответствующие значения x:

– если $y=-2$, то $x-8x=-70\Longleftrightarrow x=10$;

– если $y=-\dfrac{1}{2}$, то $x-\dfrac{1}{8}x=-70\Longleftrightarrow x=-80$.

5. ***Ответ.*** 60.

Решение. Обозначим точки касания вписанной окружности со сторонами AC и BC как D и F соответственно. Пусть $AQ=5x$,

$CD = y$ (см. рис. 3). Так как $AQ : QB = 5 : 12$, находим, что $BQ = 12x$. Мы также получаем, что $AD = AQ = 5x$, $CF = CD = y$, $BF = BQ = 12x$ ввиду того, что отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны между собой. Поскольку периметр треугольника равен 40, получаем соотношение $2y + 34x = 40$, $y = 20 - 17x$. Значит, $AC = 5x + y = 20 - 12x$, $BC = 12x + y = 20 - 5x$, $AB = 5x + 12x = 17x$. Тогда по теореме Пифагора $(20-5x)^2+(20-12x)^2 = (17x)^2 \iff 3x^2 + 17x - 20 = 0$, и, следовательно, $x = 1$ или $x = -\dfrac{20}{3}$. Отрицательное значение x не подходит. Таким образом, $x = 1$, $AC = 8$, $BC = 15$, $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC = 60$.

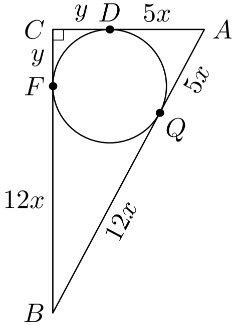


Рис. 3

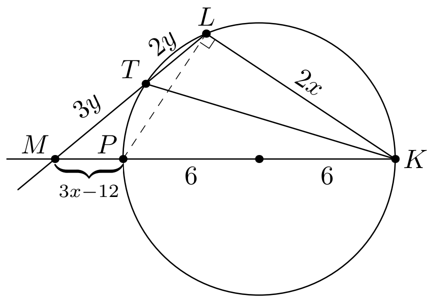


Рис. 4

6. ***Ответ.*** $(5; -11)$.

Решение. Выделяя полные квадраты, получаем

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+13)^2 < 14, \\ (x-9)^2 + (y+9)^2 < 22. \end{cases}$$

Так как квадраты неотрицательны, из этих неравенств следует, что $(x-2)^2 < 14$, а $(x-9)^2 < 22$. Единственное целое значение x, удовлетворяющее этим неравенствам — это $x = 5$. Подставляем его в систему, которая принимает вид $\begin{cases} (y+13)^2 < 5, \\ (y+9)^2 < 6 \end{cases}$. Единственное целое значение y, подходящее сюда — это $y = -11$. Итак, получилась единственная пара целых чисел $(5; -11)$, которая удовлетворяет данным неравенствам.

7. ***Ответ.*** 10.

Решение. Пусть $LT = 2y$. Тогда $MT = 3y$ (см. рис. 4). Так как KT — биссектриса треугольника, $KL : KM = LT : MT = 2y : 3y = 2 : 3$. Пусть $KL = 2x$, тогда $KM = 3x$. ML и MK — две секущие, проведённые к окружности из одной точки; следовательно, $MT \cdot ML = MK \cdot MP$ (P — точка пересечения отрезка KM с окружностью), т.е. $3y \cdot 5y = 3x \cdot (3x - 12) \iff 5y^2 = 3x^2 - 12x$. Поскольку KP — диаметр, он виден из точки L под прямым углом, а, значит, $\cos\angle LKP = \frac{KL}{KP} = \frac{x}{6}$. Тогда по теореме косинусов для треугольника KLM получаем, что $(5y)^2 = (2x)^2 + (3x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3x \cdot \frac{x}{6}$. Подставляя сюда выражение для $5y^2$, найденное выше, приходим к уравнению $15x^2 - 60x = 13x^2 - 2x^3 \iff x(x-5)(x+6) = 0$. У этого уравнения единственный положительный корень — это $x = 5$. Значит, $KL = 2x = 10$.

БИЛЕТ 1, 11 класс

1. ***Ответ.*** $7; \sqrt{2}$.

Решение. Перенося все члены влево и раскладывая выражение на множители, приходим к уравнению

$$\left(x^4 - 4\right)\left(2^{11-x} - 2^{\sqrt{2x+2}}\right) = 0.$$

Первый множитель равен 0 при $x = \pm\sqrt{2}$, и только $x = \sqrt{2}$ принадлежит области определения второго множителя. Второй множитель обращается в 0, если

$$\sqrt{2+2x} = 11 - x \iff \begin{cases} 2 + 2x = x^2 - 22x + 121, \\ 11 - x \geqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 17, \\ x = 7, \end{array}\right. \\ x \leqslant 11 \end{cases} \iff x = 7.$$

Окончательно получаем $x = 7$ или $x = \sqrt{2}$.

2. ***Ответ.*** -4 или 1.

Решение. В силу того, что $c-a$, $2a-b$ и $a+b$ есть арифметическая прогрессия, среднее число равно полусумме двух других; следовательно, $2(2a-b)=(c-a)+(a+b) \iff c=4a-3b$. Для того, чтобы последовательность была геометрической прогрессией, квадрат любого из её членов должен быть равен произведению двух соседних членов. Значит, $b^2=ac$, или, учитывая равенство $c=4a-3b$, мы получаем $a(4a-3b)=b^2$, $b^2+3ab-4a^2=0$. Решая это уравнение как квадратное относительно b, мы находим, что $b=-4a$ или $b=a$. Знаменатель q геометрической прогрессии равен $\frac{b}{a}$, следовательно, $q=-4$ или $q=1$.

3. ***Ответ.*** $\frac{\sqrt{3}}{8}$. ***Решение.*** Преобразуя произведение тригонометрических функций в сумму, получаем

$$\cos 10^\circ \cos 50^\circ = \frac{1}{2}\cos 40^\circ + \frac{1}{2}\cos 60^\circ = \frac{1}{2}\cos 40^\circ + \frac{1}{4}\,.$$

Следовательно, исходное выражение равно

$$\left(\frac{1}{2}\cos 40^\circ + \frac{1}{4}\right)\cos 70^\circ = \frac{1}{2}\cos 40^\circ \cos 70^\circ + \frac{1}{4}\cos 70^\circ = $$
$$= \frac{1}{4}\cos 110^\circ + \frac{1}{4}\cos 30^\circ + \frac{1}{4}\cos 70^\circ.$$

Поскольку $\cos 110^\circ = \cos(180^\circ - 70^\circ) = -\cos 70^\circ$, окончательно находим, что исходное выражение равно $\frac{1}{4}\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

4. ***Ответ.*** $\left(0; \frac{55}{6}\right)$.

Решение. Возьмём точку с ординатой a на оси Oy. Очевидно, интересующие нас прямые не могут быть параллельны осям координат. Тогда произведение угловых коэффициентов этих прямых равно (-1). Обозначим эти угловые коэффициенты через k и $-\frac{1}{k}$. Уравнения прямых могут быть записаны в виде $y=kx+a$ и $y=-\frac{1}{k}x+a$. Каждая из них должна иметь ровно одну общую точку с параболой, поэтому системы

$$\begin{cases} y = 7-5x-3x^2, \\ y = kx+a \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = 7-5x-3x^2, \\ y = -\frac{1}{k}x+a \end{cases}$$

должны иметь одно решение каждая.

Приравнивая правые части в каждой из систем, мы приходим к уравнениям

$$kx + a = 7 - 5x - 3x^2 \quad \text{и} \quad -\frac{1}{k}x + a = 7 - 5x - 3x^2,$$

каждое из которых должно иметь ровно одно решение.

Рассмотрим сначала первое уравнение. Оно равносильно уравнению $3x^2 + (k+5)x + (a-7) = 0$. Для того, чтобы у него было ровно одно решение, его дискриминант должен быть равен 0, откуда $(k+5)^2 - 12(a-7) = 0$. Аналогично, рассматривая второе уравнение, получаем условие $\left(\frac{1}{k} - 5\right)^2 - 12(a-7) = 0$.

Так как числа k и a должны удовлетворять обоим указанным выше равенствам, мы можем вычесть второе равенство из первого — тем самым $(k+5)^2 - \left(\frac{1}{k} - 5\right)^2 = 0$; значит, $k + 5 = -\frac{1}{k} + 5$ или $k + 5 = \frac{1}{k} - 5$. Из первого уравнения следует, что $k^2 = -1$, т.е. решений нет. Второе уравнение даёт $k^2 + 10k - 1 = 0$, откуда $k = -5 \pm \sqrt{26}$. Подставляя значения k в равенство $(k+5)^2 = 12(a-7)$, мы находим, что $12(a-7) = 26$, $a = \frac{55}{6}$.

5. ***Ответ.*** $7\sqrt{23}$.

Решение. Пусть $\angle KLM = \varphi$, тогда $\angle LMN = 180^\circ - \varphi$ (см. рис. 5). Записываем теорему косинусов для треугольников KLP и MNP: $KP^2 = 81 + 4 - 36\cos\varphi$, $NP^2 = 81 + 4 + 36\cos\varphi$. Далее применяем теорему косинусов к треугольнику KPN:

$$16 = KN^2 = (85 + 36\cos\varphi) + (85 - 36\cos\varphi) - 2\sqrt{(85 + 36\cos\varphi)(85 - 36\cos\varphi)} \cdot \frac{11}{12} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{85^2 - 36^2\cos^2\varphi} = 84 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 36^2\cos^2\varphi = 85^2 - 84^2 = (85-84)(85+84) \Longleftrightarrow \cos^2\varphi = \frac{13^2}{36^2}.$$

Значит, $\sin^2\varphi = \left(1 - \frac{13}{36}\right)\left(1 + \frac{13}{36}\right) = \frac{49\cdot 23}{36^2}$, $\sin\varphi = \frac{7\sqrt{23}}{36}$, и поэтому площадь параллелограмма равна $KL \cdot LM \cdot \sin\varphi = 7\sqrt{23}$.

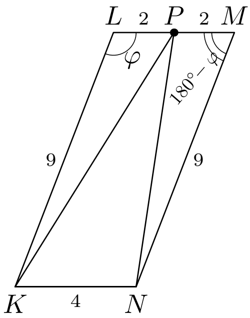


Рис. 5

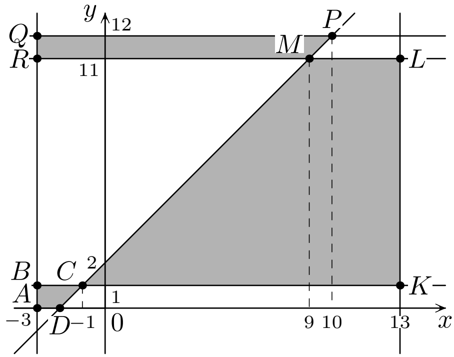


Рис. 6

6. ***Ответ.*** Множество точек изображено на рис. 6; его площадь равна 104.

Решение. Рассмотрим две возможности.

а) Основание логарифма больше 1. Это происходит тогда и только тогда, когда

$$|y-2|-2|y-4|+6>1 \Longleftrightarrow |2y-8|<|y-2|+5 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2y-8<|y-2|+5, \\ 2y-8>-|y-2|-5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |y-2|>2y-13, \\ |y-2|>3-2y \end{cases} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y-2>2y-13, \\ y-2<13-2y, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y-2>3-2y, \\ y-2<2y-3 \end{array}\right. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y<11, \\ y<5, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y>\dfrac{5}{3}, \\ y>1 \end{array}\right. \end{cases} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y<11, \\ y>1 \end{cases} \Longleftrightarrow 1<y<11.$$

При этом $x+3>1+y$, т.е. $y<x+2$. Если мы также учтём, что $x<13$, получим трапецию $CKLM$ со следующими координатами вершин: $C(-1;1)$, $K(13;1)$, $L(13;11)$, $M(9;11)$ (см. рис. 6).

б) Основание логарифма заключено между 0 и 1. Чтобы определить значения y, при которых это выполнено, мы решаем неравенство $|y-2|-2|y+4|+6>0$, а затем исключаем отрезок $[1;11]$ из полученного множества решений.

$$|y-2|-2|y-4|+6>0 \iff |2y-8|<|y-2|+6 \iff$$
$$\iff \begin{cases} 2y-8<|y-2|+6, \\ 2y-8>-|y-2|-6 \end{cases} \iff \begin{cases} |y-2|>2y-14, \\ |y-2|>2-2y \end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y-2>2y-14, \\ y-2<14-2y, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y-2>2-2y, \\ y-2<2y-2 \end{array}\right. \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y<12, \\ y<\dfrac{16}{3}, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y>\dfrac{4}{3}, \\ y>0 \end{array}\right. \end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} y<12, \\ y>0 \end{cases} \iff 0<y<12.$$

Итак, основание логарифма принимает значения между 0 и 1 для $y \in (0;1) \cup (11;12)$. При этих значениях y исходное неравенство принимает вид $x+3<1+y$, или $y>x+2$. Если мы также учтём, что $x>-3$ (следует из области определения исходного неравенства), получаем две трапеции $ABCD$ и $MPQR$, вершины которых расположены в точках $A(-3;0)$, $B(-3;1)$, $C(-1;1)$, $D(-2;0)$, $M(9;11)$, $P(10;12)$, $Q(-3;12)$, $R(-3;11)$.

Площадь множества равна сумме площадей всех трёх трапеций. $S_{ABCD}=\dfrac{1+2}{2}\cdot 1=1{,}5$, $S_{CKLM}=\dfrac{14+4}{2}\cdot 10=90$, $S_{ABCD}=\dfrac{12+13}{2}\cdot 1=12{,}5$; значит, $S_{\text{общ}}=104$.

7. ***Ответ.*** 4. ***Решение.*** Угол QOP, равный 60°, — это угол между пересекающимися хордами, поэтому он равен полусумме дуг PQ и RS (см. рис. 7). Так как эти дуги равны между собой (они заключены между параллельными хордами QR и PS), каждая из них равна 60°. Хорды AS и PR также параллельны друг другу (как основания трапеции), поэтому дуга AP равна 60°. Хорды PR и PS равны между

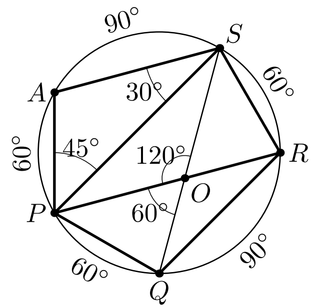


Рис. 7

собой; следовательно, равны и соответствующие им дуги, а именно, дуга PQR равна дуге PAS. Отсюда $\overset{\smile}{QR} = \overset{\smile}{AS}$. Поскольку вся окружность составляет 360°, получаем, что $\overset{\smile}{QR} = \overset{\smile}{AS} = 90^\circ$.

Угол APS вписан в окружность Ω, и поэтому он равен $\frac{1}{2}\overset{\smile}{AS} = \frac{1}{2}90^\circ = 45^\circ$. Таким же образом находим, что $\angle ASP = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AP} = 30^\circ$. Тогда $\angle PAS = 180^\circ - \angle APS - \angle ASP = 105^\circ$. Пусть диаметр окружности равен d. По теореме синусов для треугольника APS получаем $AP = d\sin 30^\circ = \frac{d}{2}$, $AS = d\sin 45^\circ = \frac{d}{\sqrt{2}}$. Чтобы выразить площадь треугольника APS, нам также нужно, что $\sin 105^\circ = \sin(45^\circ + 60^\circ) = \sin 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \sin 60^\circ = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Следовательно, площадь треугольника APS равна

$$\frac{1}{2}AP \cdot AS \cdot \sin 105^\circ = \frac{d^2\left(\sqrt{3}+1\right)}{16}.$$

Приравнивая её к $4\left(\sqrt{3}+1\right)$, находим, что $d^2 = 64$, т.е. $d = 8$, а радиус равен 4.

БИЛЕТ 2, 11 класс

1. ***Ответ.*** -5; $-\sqrt{3}$.

Решение. Перенося все члены влево и раскладывая выражение на множители, приходим к уравнению

$$\left(x^4 - 9\right)\left(3^{\sqrt{1-3x}} - 3^{x+9}\right) = 0.$$

Первый множитель равен 0 при $x = \pm\sqrt{3}$, и только $x = -\sqrt{3}$ принадлежит области определения второго множителя. Второй множитель обращается в 0, если

$$\sqrt{1-3x} = x+9 \Longleftrightarrow \begin{cases} 1-3x = x^2+18x+81, \\ x+9 \geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -16, \\ x = -5, \end{array}\right. \\ x \geqslant -9 \end{cases} \Longleftrightarrow x = -5.$$

Окончательно получаем $x = -5$ или $x = -\sqrt{3}$.

2. *Ответ.* -3 или 1.

Решение. В силу того, что $3c-2a$, $a-b$ и $a-2c$ есть арифметическая прогрессия, среднее число равно полусумме двух других; следовательно, $2(a-b)=(a-2c)+(3c-2a) \iff c=3a-2b$. Для того, чтобы последовательность была геометрической прогрессией, квадрат любого из её членов должен быть равен произведению двух соседних членов. Значит, $b^2=ac$, или, учитывая равенство $c=3a-2b$, мы получаем $a(3a-2b)=b^2$, $b^2+2ab-{}$ $-3a^2=0$. Решая это уравнение как квадратное относительно b, мы находим, что $b=-3a$ или $b=a$. Знаменатель q геометрической прогрессии равен $\frac{b}{a}$, следовательно, $q=-3$ или $q=1$.

3. *Ответ.* $\frac{1}{8}$.

Решение. Преобразуя произведение тригонометрических функций в сумму, получаем

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ = \frac{1}{2}\cos 40^\circ - \frac{1}{2}\cos 60^\circ = \frac{1}{2}\cos 40^\circ - \frac{1}{4}\,.$$

Следовательно, исходное выражение равно

$$\left(\frac{1}{2}\cos 40^\circ - \frac{1}{4}\right)\sin 70^\circ = \frac{1}{2}\cos 40^\circ \sin 70^\circ - \frac{1}{4}\sin 70^\circ = \\ = \frac{1}{4}\sin 110^\circ + \frac{1}{4}\sin 30^\circ - \frac{1}{4}\sin 70^\circ.$$

Поскольку $\sin 110^\circ = \sin(180^\circ - 70^\circ) = \sin 70^\circ$, окончательно находим, что $\frac{1}{4}\sin 30^\circ = \frac{1}{8}$.

4. *Ответ.* $\left(0; \frac{53}{16}\right)$.

Решение. Возьмём точку с ординатой a на оси Oy. Очевидно, интересующие нас прямые не могут быть параллельны осям координат. Тогда произведение угловых коэффициентов этих прямых равно (-1). Обозначим эти угловые коэффициенты через k и $-\frac{1}{k}$. Уравнения прямых могут быть записаны в виде $y=kx+a$ и $y=-\frac{1}{k}x+a$. Каждая из них должна иметь ровно одну общую точку с параболой, поэтому системы

$$\begin{cases} y = 1+6x-4x^2, \\ y = kx+a \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = 1+6x-4x^2, \\ y = -\frac{1}{k}x+a \end{cases}$$

должны иметь одно решение каждая.

Приравнивая правые части в каждой из систем, мы приходим к уравнениям

$$kx + a = 1 + 6x - 4x^2 \quad \text{и} \quad -\frac{1}{k}x + a = 1 + 6x - 4x^2,$$

каждое из которых должно иметь ровно одно решение.

Рассмотрим сначала первое уравнение. Оно равносильно уравнению $4x^2 + (k-6)x + (a-1) = 0$. Для того, чтобы у него было ровно одно решение, его дискриминант должен быть равен 0, откуда $(k-6)^2 - 16(a-1) = 0$. Аналогично, рассматривая второе уравнение, получаем условие $\left(\frac{1}{k} + 6\right)^2 - 16(a-1) = 0$.

Так как числа k и a должны удовлетворять обоим указанным выше равенствам, мы можем вычесть второе равенство из первого — тем самым $(k-6)^2 - \left(\frac{1}{k} + 6\right)^2 = 0$; значит, $k - 6 = -\frac{1}{k} - 6$ или $k - 6 = \frac{1}{k} + 6$. Из первого уравнения следует, что $k^2 = -1$, т.е. решений нет. Второе уравнение даёт $k^2 - 12k - 1 = 0$, откуда $k = 6 \pm \sqrt{37}$. Подставляя значения k в равенство $(k-6)^2 = 16(a-1)$, мы находим, что $16(a-1) = 37$, $a = \frac{53}{16}$.

5. ***Ответ.*** $2\sqrt{17}$.

Решение. Пусть $\angle KLM = \varphi$, тогда $\angle LMN = 180^\circ - \varphi$. Записываем теорему косинусов для треугольников KLP и MNP: $KP^2 = 25 + 9 - 30\cos\varphi$, $NP^2 = 25 + 9 + 30\cos\varphi$ (см. рис. 8). Далее применяем теорему косинусов к треугольнику KPN:

$$36 = KN^2 = (34 + 30\cos\varphi) + (34 - 30\cos\varphi) - {}$$
$$-2\sqrt{(34 + 30\cos\varphi)(34 - 30\cos\varphi)} \cdot \frac{8}{9} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \sqrt{34^2 - 30^2\cos^2\varphi} = 18 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 34^2 - 30^2\cos^2\varphi = 18^2 \Longleftrightarrow 30^2\cos^2\varphi = (34-18)(34+18) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \cos^2\varphi = \frac{13 \cdot 16}{15^2}.$$

Значит, $\sin^2\varphi = 1 - \frac{13\cdot 16}{15^2} = \frac{17}{15^2}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{17}}{15}$, и поэтому площадь параллелограмма равна $KL\cdot LM\cdot\sin\varphi = 2\sqrt{17}$.

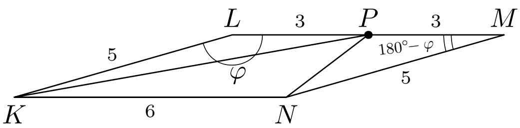


Рис. 8

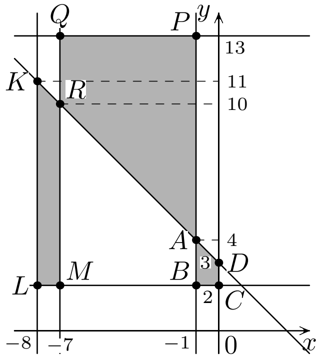


Рис. 9

6. ***Ответ.*** Множество изображено на рис. 9; его площадь равна 46.

Решение. Рассмотрим две возможности.

а) Основание логарифма больше 1. Это происходит тогда и только тогда, когда

$$|x+2| - 2|x+3| + 4 > 1 \iff |2x+6| < |x+2| + 3 \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x+6 < |x+2|+3, \\ 2x+6 > -|x+2|-3 \end{cases} \iff \begin{cases} |x+2| > 2x+3, \\ |x+2| > -2x-9 \end{cases} \iff$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x+2 > 2x+3, \\ x+2 < -2x-3, \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x+2 > -2x-9, \\ x+2 < 2x+9 \end{array} \right. \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x < -\frac{5}{3}, \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x > -\frac{11}{3}, \\ x > -7 \end{array} \right. \end{array} \right. \iff$$

$$\iff \begin{cases} x < -1, \\ x > -7 \end{cases} \iff -7 < x < -1.$$

При этом $y - 2 > 1 - x$, т.е. $y > 3 - x$. Если мы также учтём, что $y < 13$, получим трапецию $APQR$ со следующими координатами вершин: $A(-1;4)$, $P(-1;13)$, $Q(-7;13)$, $R(-7;10)$.

б) Основание логарифма заключено между 0 и 1. Чтобы определить значения x, при которых это выполнено, мы решаем неравенство $|x+2|-2|x+3|+4>0$, а затем исключаем отрезок $[-7;-1]$ из полученного множества решений.

$$|x+2|-2|x+3|+4>0 \iff |2x+6|<|x+2|+4 \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x+6<|x+2|+4, \\ 2x+6>-|x+2|-4 \end{cases} \iff \begin{cases} |x+2|>2x+2, \\ |x+2|>-2x-10 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+2>2x+2, \\ x+2<-2x-2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x+2>-2x-10, \\ x+2<2x+10 \end{array}\right. \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<0, \\ x<-\dfrac{4}{3}, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x>-4, \\ x>-8 \end{array}\right. \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x<0, \\ x>-8 \end{cases} \iff -8<x<0.$$

Итак, основание логарифма принимает значения между 0 и 1 для $x\in(-8;-7)\cup(-1;0)$. При этих значениях x исходное неравенство принимает вид $y-2<1-x$, или $y<3-x$. Если мы также учтём, что $y>2$ (следует из области определения исходного неравенства), получаем две трапеции $ABCD$ и $KLMR$, вершины которых расположены в точках $A(-1;4)$, $B(-1;2)$, $C(0;2)$, $D(0;3)$, $R(-7;10)$, $K(-8;11)$, $L(-8;2)$, $M(-7;2)$.

Площадь множества равна сумме площадей всех трёх трапеций. $S_{ABCD}=\dfrac{1+2}{2}\cdot 1=1{,}5$, $S_{APQR}=\dfrac{9+3}{2}\cdot 6=36$, $S_{KLMR}=$ $=\dfrac{9+8}{2}\cdot 1=8{,}5$; значит, $S_{\text{общ}}=46$.

7. ***Ответ.*** 6.

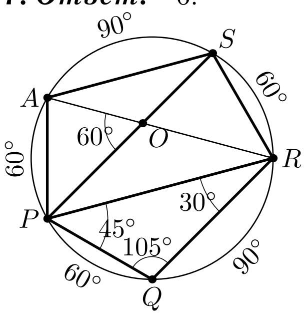


Рис. 10

Решение. Угол AOP, равный 60°, — это угол между пересекающимися хордами, поэтому он равен полусумме дуг AP и RS (см. рис. 10). Так как эти дуги равны между собой (они заключены между параллельными хордами PR и AS), каждая из них равна 60°. Хорды QR и PS также параллельны друг другу (как основания трапеции), поэтому дуга PQ также равна

60°. Хорды PR и PS равны между собой; следовательно, равны и соответствующие им дуги, а именно, дуга PQR равна дуге PAS. Отсюда $\overset{\smile}{QR} = \overset{\smile}{AS}$. Поскольку вся окружность составляет 360°, получаем, что $\overset{\smile}{QR} = \overset{\smile}{AS} = 90^\circ$.

Угол QPR вписан в окружность Ω, и поэтому он равен $\frac{1}{2}\overset{\smile}{QR} = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$. Таким же образом находим, что $\angle PRQ = \frac{1}{2}\overset{\smile}{PQ} = 30^\circ$. Тогда $\angle PQR = 180^\circ - \angle QRP - \angle QPR = 105^\circ$. Пусть диаметр окружности равен d. По теореме синусов для треугольника PQR получаем $PQ = d \sin 30^\circ = \frac{d}{2}$, $QR = d \sin 45^\circ = \frac{d}{\sqrt{2}}$. Чтобы выразить площадь треугольника PQR, нам также нужно, что $\sin 105^\circ = \sin(45^\circ + 60^\circ) = \sin 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \sin 60^\circ = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Следовательно, площадь треугольника PQR равна

$$\frac{1}{2} PQ \cdot QR \cdot \sin 105^\circ = \frac{d^2\left(\sqrt{3}+1\right)}{16}.$$

Приравнивая её к $9\left(\sqrt{3}+1\right)$, находим, что $d^2 = 144$, т.е. $d = 12$, а радиус равен 6.

Учебное издание

З А Д А Ч И

физико-математических олимпиад

«Phystech.International» 2018

Учебно-методические разработки
по физике и математике

Тираж 50. Формат $60 \times 84^1/_{16}$. Заказ № 3817. 20.11.2019.
Московский физико-технический институт.
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.

ООО «Эффективные решения».
141707, Московская обл., г. Долгопрудный, пр. Пацаева 7, корп. 1.