Вариант 1

1. Найдите точки локального минимума функции $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 60x^2 - 96x + \sqrt{17}$. Если их несколько, укажите наибольшую из них, а если их нет, напишите в ответе 2022. (Обратите внимание: вам нужно указать x-координату.)

   Ответ: 4.

   Решение. Производная равна $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 120x - 96 = 12(x-4)(x+1)(x+2)$. Она обращается в ноль в точках $x = 4$, $x = -1$, $x = -2$. Из этих точек $x = -1$ – точка локального максимума, а две другие точки – локальные минимумы. (Если производная отрицательна слева от точки и положительна справа от неё, то это точка минимума. Если производная положительна слева от точки и отрицательна справа от неё, то это максимум.)

2. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{\frac{8}{5}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{3-\sqrt{5}} + \left(\sqrt{\frac{8}{5}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{3+\sqrt{5}}$.

   Ответ: 3.

   Решение. Поскольку $3 - \sqrt{5} = \frac{1}{2}\left(6 - 2\sqrt{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)^2$, получаем, что

$$\left(\sqrt{\frac{8}{5}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{3-\sqrt{5}} = \left(\sqrt{\frac{8}{5}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}.$$

   Аналогично

$$\left(\sqrt{\frac{8}{5}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{3+\sqrt{5}} = \left(\sqrt{\frac{8}{5}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}.$$

   Следовательно, значение всего выражения равно

$$\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\left(4+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-1\right) + \left(4-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+1\right)\right) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(1 + 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 1\right) = 3.$$

3. x_1 и x_2 – корни уравнения $5x^2 - 3x - 10 = 0$. Найдите $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$.

   Ответ: 0,954.

   Решение. Дискриминант уравнени равен $D = 3^2 + 4\cdot 5\cdot 10 = 209 > 0$, поэтому оно имеет два различных корня x_1 и x_2. По теореме Виета, $x_1 + x_2 = \frac{3}{5}$, $x_2x_2 = \frac{-10}{5} = -2$. Значит,

$$\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2} = \frac{(x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2)}{(x_1x_2)^2} = \frac{(3/5)^3 - 3(-2)(3/5)}{(-2)^2} = 0{,}954.$$

4. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{6-0.2x}\left(40x^2 - x^3 - 300x\right) \geqslant 1 + \log_{6-0.2x}(25x), \\ \frac{x^2-20x-25}{x-20} + \frac{75}{x-30} \leqslant x. \end{cases}$$

   В ответе укажите количество его целочисленных решений. Если их бесконечно много, запишите 2022.

   Ответ: 5.

   Решение. Рассмотрим первое неравенство. Его область определения задаётся условиями

$$\begin{cases} 6 - 0.2x > 0, \\ 6 - 0.2x \neq 1, \\ 40x^2 - x^3 - 300x > 0, \\ 25x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 30, \\ x \neq 25, \\ x \in (-\infty; 0) \cup (10; 30), \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (10; 25) \cup (25; 30).$$

Используя метод рационализации (неравенства $\log_a b \geqslant \log_a c$ and $(a-1)(b-c) \geqslant 0$ эквивалентны на области определения), получаем, что

$$\log_{6-0.2x}\left(40x^2 - x^3 - 300x\right) \geqslant 1 + \log_{6-0.2x}(25x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_{6-0.2x}\left(40x^2 - x^3 - 300x\right) \geqslant \log_{6-0.2x}\left(150x - 5x^2\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (6 - 0.2x - 1)\left(40x^2 - x^3 - 300x - 150x + 5x^2\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow x(x-25)(x-15)(x-30) \geqslant 0.$$

Поэтому $x \in (-\infty; 0] \cup [15; 25] \cup [30; +\infty)$, и, принимая во внимание область определения, получаем $15 \leqslant x < 25$.

Решим второе неравенство:

$$\frac{x^2 - 20x}{x - 20} - \frac{25}{x - 20} + \frac{75}{x - 30} \leqslant x \Leftrightarrow \frac{-25}{x - 20} + \frac{75}{x - 30} \leq x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x - 15}{(x - 20)(x - 30)} \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 15] \cup (20; 30).$$

Пересекая два полученных выше множества, находим $x \in \{15\} \cup (20; 25)$. В этом множестве содержится ровно 5 целых чисел.

5. Две яхты движутся прямолинейно и равномерно к маленькому острову. В начальный момент местоположения яхт и острова образуют равносторонний треугольник. После того, как первое судно прошло 40 километров, указанный выше треугольник становится прямоугольным. В момент, когда вторая яхта достигает острова, первой яхте ещё остаётся пройти 60 километров. Найдите расстояние между яхтами в начальный момент времени.

Ответ: 120.

Решение. Обозначим сторону первоначального треугольника через x. Очевидно, вторая яхта движется с меньшей скоростью, так как она позднее прибывает в порт. Пусть A и B – положения яхт в начале; A_1 и B_1 – положения яхт в тот момент, когда первая яхта преодолела 40 км; пусть C – положение порта.

Треугольник A_1B_1C прямоугольный, и $\angle A_1B_1C = 90^\circ$, $\angle A_1CB_1 = 60^\circ$. Следовательно, $A_1C = x - 40$, $B_1C = \frac{1}{2}A_1C = \frac{x}{2} - 20$, $BB_1 = x - B_1C = \frac{x}{2} + 20$.

Теперь можем отметить, что первой яхте для прохождения 40 километров нужно столько же времени, сколько второй яхте для прохождения $\frac{x}{2} + 20$ километров. С другой стороны, первая и вторая яхты затрачивают одно и то же время для прохождения $x - 60$ и x километров соответственно. Следовательно, отношение скоростей может быть выражено двумя способами: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{x-60}{x} = \frac{40}{0.5x+20}$. Упрощая уравнение, имеем $x^2 - 100x - 2400 = 0$, и поэтому $x = 120$ или $x = -20$. Так как x – положительное число, то $x = 120$.

6. Окружности Ω и ω пересекаются в точках P и Q. Прямая ℓ пересекается с Ω в точках A и C, а с ω – в точках B и D. Известно, что B лежит между A и C; C лежит между B и D. PQ и AD пересекаются в точке F. Найдите BF, если известно, что $BC = 8$, $AB : CD = 3 : 2$.

Ответ: 4,8.

Решение. Обозначим $AB = 3y$, $BF = x$. Из условия следует, что $CF = 8 - x$, $CD = 2y$. По теореме о пересекающихся хордах имеем $AF \cdot CF = PF \cdot QF$ and $PF \cdot QF = BF \cdot DF$. Это означает, что $AF \cdot CF = BF \cdot DF$, или, используя выше введённые обозначения, $(3y + x)(8 - x) = x(8 - x + 2y)$. Упрощая, получаем $24y = 5xy$, и поэтому $x = 4{,}8$.

7. Числа a, b, c удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 6ac + 3a = 2c - 2, \\ ab + bc = 2(c - a + 1), \\ bc - 6ac + b = 3a + 3. \end{cases}$$

Какое наибольшее значение может принимать выражение $6a+b-c$?

Ответ: 10,5.

Решение. Складывая первое и третье уравнения, получаем $bc+b=2c+1$, $b(c+1)=2c+1$. Легко проверить, что $c=-1$ не удовлетворяет уравнению, а значит, $c+1\neq 0$. Поэтому $b=\frac{2c+1}{c+1}$. Таким же образом из первого уравнения выражаем, что $a=\frac{2c-2}{6c+3}$. Подставляя эти выражения во второе уравнение исходной системы, имеем

$$\frac{(2c+1)(2c-2)}{(c+1)(6c+3)}+\frac{2c^2+c}{c+1}=2\left(c-\frac{2c-2}{6c+3}+1\right).$$

После умножения обеих частей на общий знаменатель, раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получаем $10c^2+23c+12=0$, следовательно, $c=-\frac{3}{2}$ or $c=-\frac{4}{5}$. Вычисляя соответствующие значения a и b, окончательно находим, что у системы два решения: $\left(\frac{5}{6};4;-\frac{3}{2}\right)$ и $\left(2;-3;-\frac{4}{5}\right)$. Максимальное значение $6a+b-c$ равно 10,5.

8. Решите уравнение $1+\sin(4x)-\cos(4x)=2\sin(5x)\cos x$. В ответе укажите количество его целочисленных корней на промежутке $-4\pi\leqslant x\leqslant 7\pi$.

Ответ: 45.

Решение. Уравнение равносильно каждому из следующих:

$$1+\sin 4x-\cos 4x=2\sin 5x\cos x\Leftrightarrow 1-\cos 4x=\sin 6x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x=3\sin 2x-4\sin^3 2x\Leftrightarrow \sin 2x\left(4\sin^2 2x+2\sin 2x-3\right)=0;$$

Значит, $\sin 2x=0$ или $\sin 2x=\frac{\sqrt{13}-1}{4}$ (третий корень $\sin 2x=-\frac{\sqrt{13}+1}{4}$ не подходит, так как он меньше -1). Решая полученные выше уравнения, имеем $x=\frac{\pi k}{2}$, $x=\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{13}-1}{4}+\pi k$, $x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{13}-1}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. На интервале $-4\pi\leqslant x\leqslant 7\pi$ расположены 23 корня первой серии ($-8\leqslant k\leqslant 14$), 11 корней второй ($-4\leqslant k\leqslant 6$), и 11 корней третьей ($-4\leqslant k\leqslant 6$) – всего 45 корней.

В связи с ошибкой в задании 8, мы засчитывали два варианта ответов в качестве верных: тот, что является верным ответом к верному условию, и тот, что является верным ответом к условию с ошибкой.

Вариант 2.

1. Найдите значение выражения x^3-6x, если $x=\sqrt[3]{\sqrt{353}-19}-\sqrt[3]{\sqrt{353}+19}$.

   Ответ: -38.

   Решение.

$$x^3-6x=\left(\sqrt{353}-19\right)-3\sqrt[3]{\left(\sqrt{353}-19\right)^2\left(\sqrt{353}+19\right)}+3\sqrt[3]{\left(\sqrt{353}-19\right)\left(\sqrt{353}+19\right)^2}-$$
$$-\left(\sqrt{353}+19\right)-6\left(\sqrt[3]{\sqrt{353}-19}-\sqrt[3]{\sqrt{353}+19}\right)=$$
$$=-38-3\sqrt[3]{\left(\sqrt{353}-19\right)\left(\sqrt{353}+19\right)}\left(\sqrt[3]{\sqrt{353}-19}-\sqrt[3]{\sqrt{353}+19}\right)-$$
$$-6\left(\sqrt[3]{\sqrt{353}-19}-\sqrt[3]{\sqrt{353}+19}\right)=-38-3\sqrt[3]{353-19^2}\left(\sqrt[3]{\sqrt{353}-19}-\sqrt[3]{\sqrt{353}+19}\right)-$$
$$-6\left(\sqrt[3]{\sqrt{353}-19}-\sqrt[3]{\sqrt{353}+19}\right)=-38.$$

2. Прямая ℓ с уравнением $y=ax+b$ проходит через точку $D(1;-6)$, а также является касательной к графику функции $y=x^3-7x^2$. Составьте уравнение прямой ℓ, имеющей минимальный угловой коэффициент. В ответе укажите значение выражения $3a+2b$.

   Ответ: -27.

   Решение. Пусть x_0 – точка касания. Тогда $y(x_0)=x_0^3-7x_0^2$, $y'(x_0)=3x_0^2-14x_0$, и уравнение касательной имеет вид $y=(3x_0^2-14x_0)(x-x_0)+x_0^3-7x_0^2$. Поскольку прямая проходит через точку $D(1;-6)$, мы подставляем координаты точки D в уравнение и получаем $-6=(3x_0^2-14x_0)(1-x_0)+x_0^3-7x_0^2$, $x_0^3-5x_0^2+7x_0-3=0$. Раскладывая на множители, имеем $(x_0-1)^2(x_0-3)=0$. Если $x_0=1$, то касательная – это $y=-11x+5$, а если $x_0=3$, то получаем $y=-15x+9$. Вторая прямая имеет меньший угловой коэффициент, поэтому $a=-15$, $b=9$, $3a+2b=-27$.

3. Найдите наибольший корень уравнения $\sqrt{12x^2-63x-29}=7-2x$. Если у него нет корней, запишите в ответ 2022.

   Ответ: -1.625.

4. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}2\log_2\frac{x-10}{x+12}+\log_2(x+12)^2\geqslant 2+\log_2 100,\\ 4^{0.1x+1}-33\cdot\sqrt[10]{2^x}+8\leqslant 0.\end{cases}$$

   В ответе укажите количество его целочисленных решений. Если их бесконечно много, запишите вместо этого 2022.

   Ответ: 9.

   Решение. Рассмотрим первое неравенство. Его область определения задаётся условиями $\frac{x-10}{x+12}>0$, $(x+12)^2>0$, откуда $x\in(-\infty;-12)\cup(10;+\infty)$. На области определения неравенство эквивалентно следующим:

$$\log_2\left(\frac{x-10}{x+12}\right)^2+\log_2(x+12)^2\geqslant 2+\log_2 100\Leftrightarrow\log_2(x-10)^2\geqslant\log_2 400\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x-10)^2\geqslant 400\Leftrightarrow(x+10)(x-30)\geqslant 0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-10]\cup[30;+\infty).$$

Учитывая область определения, окончательно получаем $x \in (-\infty; -12) \cup [30; +\infty)$.

Во втором неравенстве вводим замену $4^{0,1x} = t$, откуда следует, что $4t^2 - 33t + 8 \leqslant 0$, $(t-8)(4t-1) \leqslant 0$, $\frac{1}{4} \leqslant t \leqslant 8$. Значит, $\frac{1}{4} \leqslant 2^{0,1x} \leq 8$, $-2 \leqslant \frac{x}{10} \leqslant 3$, $-20 \leqslant x \leqslant 30$.

Пересекая множества решений неравенств, находим $x \in [-20; -12) \cup \{30\}$. В этом множестве ровно 9 целых чисел.

5. Трём пешеходам нужно было пройти из A в B по одной и той же дороге. Первый и второй пешеходы вышли из A в 7 часов утра, а третий вышел на два часа позже. Все пешеходы двигаются с постоянной скоростью. Известно, что к полудню ни один из пешеходов не обгонял других. Расстояние между первым и третьим пешеходами в полдень было в 4 раза меньше, чем в 9:00. Расстояние между вторым и третьим пешеходами в 9:00 было в $\frac{10}{7}$ раз больше, чем в полдень Найдите отношение скорости первого пешехода к скорости второго.

Ответ: 0,8.

Решение. Пусть v_1, v_2, v_3 – скорости пешеходов. В 9:00 положения пешеходов– это $2v_1$, $2v_2$, 0, а в 12:00 они находятся в точках $5v_1$, $5v_2$, $3v_3$. Следовательно, расстояния между первым и третьим пешеходами в 9:00 и в 12:00 равны $2v_1$ и $5v_1 - 3v_3$. По уксловию, $4(5v_1 - 3v_3) = 2v_1$. Аналогично $2v_2 = \frac{10}{7}(5v_2 - 3v_3)$. Первое уравнение даёт $v_1 = \frac{2}{3}v_3$, а из второго уравнения следует, что $v_2 = \frac{5}{6}v_3$. Значит, $\frac{v_1}{v_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} = 0{,}8$.

6. Окружности Ω (с центром A) и ω (с центром B) касаются прямой ℓ в точках P и Q соответственно. Отрезок AB пересекается с прямой ℓ. Известно, что радиусы окружностей равны 16 и 5, а $PQ : AB = 20 : 29$. Найдите AB.

Ответ: 29.

Решение. Опустим перпендикуляр AH из точки A на прямую BQ. Четырёхугольник $APQH$ – прямоугольник, и поэтому $BH = BQ + QH = BQ + AP = 21$. Пусть $PQ = 20x$. Тогда $AH = PQ = 20x$, $AB = 29x$. Применяя теорему Пифагора для прямоугольного треугольника ABH, получаем $(29x)^2 = (21x)^2 + 20^2$. Отсюда $x = 1$, следовательно, $AB = 29$.

7. Числа a, b удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} a^2 + ab - 2b^2 + 8a + 10b + 12 = 0, \\ a^2 + 3ab + 2b^2 - a + b - 6 = 0. \end{cases}$$

Каково наибольшее возможное значение выражения $b^2 - a$?

Ответ: 12.

Решение. Первое уравнение системы можно записать в виде $a^2 + (b+8)a - 2b^2 + 10b + 12 = 0$. Оно является квадратным относительно a. Его дискриминант есть $D = (b+8)^2 + 4(2b^2 - 10b - 12) = (3b-4)^2$, и его корни равны $a = \frac{-b-8\pm(3b-4)}{2}$, поэтому $a = -2b - 2$ или $a = b - 6$. Теперь мы подставляем эти значения во второе уравнение.

Если $a = -2b - 2$, то получаем $4b^2 + 8b + 4 - 6b^2 - 6b + 2b^2 + 2b + 2 + b - 6 = 0$; значит, $b = 0$ и $a = -2$. Если $a = b - 6$, то $b^2 - 12b + 36 + 3b^2 - 18b + 2b^2 - b + 6 + b - 6 = 0$, $b^2 - 5b + 6 = 0$, и у нас есть ещё два решения $b = 3$, $a = -3$ и $b = 2$, $a = -4$. Максимальное значение $b^2 - a$ достигается при $(-3; 3)$, и оно равно 12.

8. $KLMN$ – ромб, и в нём $\angle KLM = \arccos\frac{8}{17}$, $KN = 34$. Высоты KA и KB опущены из вершины K на стороны LM и MN. Найдите радиус окружности, вписанной в четырёхугольник $KAMB$. Если вы считаете, что в четырёхугольник $KAMB$ невозможно вписать окружность, напишите в ответе 2022.

Ответ: 11,25.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник AKL. Из него находим, что $AL = KL \cdot \cos\angle ALK = 34 \cdot \frac{8}{17} = 16$; $AK = \sqrt{KL^2 - AL^2} = 30$. Помимо этого $AM = LM - AL = 18$. Аналогично $BK = 30$, $BM = 18$.

Рассмотрим четырёхугольник $AKBM$. Углы A и B прямые, поэтому он выпуклый; $AM + BK = AK + BM$. Следовательно, $KAMB$ – описанный четырёхугольник. В силу симметрии центр вписанной окружности O расположен на диагонали KM. Опустим перпендикуляры OE и OF из точки O на стороны AK и AM соответственно. Пусть r – радиус вписанной окружности; тогда $AE = r$, $EK = 30 - r$. Треугольники OEK и MAK подобны, и поэтому $\frac{OE}{AM} = \frac{KE}{AE}$, т.е. $\frac{r}{18} = \frac{30-r}{30}$. Следовательно, $r = \frac{45}{4} = 11{,}25$.

Вариант 3.

1. Решите уравнение $\sqrt{2x^2+3x+2}-\sqrt{2x^2+3x-5}=1$. В ответе укажите его наименьший корень. Если уравнение не имеет корней, запишите 2022.

   Ответ: -3.5.

   Решение. Обозначим $2x^2+3x=t$. Тогда

$$\sqrt{t+2}=\sqrt{t-5}+1 \Leftrightarrow \begin{cases} t+2=t-4+2\sqrt{t-5}, \\ t\geqslant 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{t-5}=3, \\ t\geqslant 5 \end{cases} \Leftrightarrow t=14.$$

   Следовательно, $2x^2+3x=14$, $x=2$ или $x=-\frac{7}{2}$. Наименьший корень – это $x=-\frac{7}{2}=-3.5$.

2. Прямая $y=ax+b$ проходит через точку $(4;1)$ и касается графика функции $y=x^2-4x+2$. Каково наибольшее возможное значение a?

   Ответ: 6.

   Решение. Если прямая $y=ax+b$ проходит через точку $(4;1)$, то $1=4a+b$, и поэтому $b=1-4a$, уравнение прямой может быть переписано в виде $y=ax+1-4a$. Прямая касается параболы $y=x^2-4x+2$ тогда и только тогда, когда система уравнений $y=ax+1-4a$ и $y=x^2-4x+2$ имеет ровно одно решение. Приравнивая правые части, имеем $x^2-(4+a)x+(4a+1)=0$. Дискриминант должен быть равен нулю, поэтому have $(4+a)^2-4(4a+1)=0$, $a=2$ or $a=6$. Наибольшее возможное значение a – это 6.

3. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos(x\pi)+\frac{1}{\cos(x\pi)}=\cos^2(x\pi)+\frac{1}{\cos^2(x\pi)}$.

   Ответ: -2.

   Решение. Обозначим $t=\cos(x\pi)+\frac{1}{\cos(x\pi)}$. Возводя обе части в квадрат, имеем $t^2=\cos^2(x\pi)+2+\frac{1}{\cos^2(x\pi)}$. Изначальное уравнение принимает вид $t=t^2-2$, поэтому $t=1$ или $t=2$.

   Если $t=-1$, получаем уравнение $\cos(x\pi)+\frac{1}{\cos(x\pi)}=-1$, $\cos^2(x\pi)+\cos(x\pi)+1=0$, которое не имеет решений.

   Если $t=2$, то $\cos(x\pi)+\frac{1}{\cos(x\pi)}=2$, $\cos^2(x\pi)-2\cos(x\pi)+1=0$, $\cos(x\pi)=1$, $x\pi=2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Окончательно, $x=2k$, и наибольший отрицательный корень равен -2.

4. Решите неравенство

$$\frac{4\log_2(x+3)-11}{\log_2^2(x+3)-5\log_2(x+3)+6}\geqslant 1+\log_{0.125x+0.375}2.$$

   В ответе укажите количество его целочисленных решений. Если их бесконечно много, запишите вместо этого 2022.

   Ответ: 27.

   Решение. Пусть $t=\log_2(x+3)$. Тогда $\log_{0.125x+0.375}2=\frac{1}{\log_2\left(\frac{x+3}{8}\right)}=\frac{1}{\log_2(x+3)-3}=\frac{1}{t-3}$, и неравенство принимает вид

$$\frac{4t-11}{(t-3)(t-2)}-1-\frac{1}{t-3}\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-t^2+8t-15}{(t-3)(t-2)}\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(t-5)(t-3)}{(t-3)(t-2)}\leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<t<3, \\ 3<t\leqslant 5. \end{array}\right.$$

   Возвращаясь к переменной x, находим

$$\left[\begin{array}{l} 2<\log_2(x+3)<3, \\ 3<\log_2(x+3)\leqslant 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4<x+3<8, \\ 8<x+3\leqslant 32 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(1;5)\cup(5;29].$$

   Количество целочисленных решений равно 27.

5. Числа a, b удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} - 2ab = 16, \\ \frac{b^3}{2a} + 3ab = 25. \end{cases}$$

Каково наименьшее возможное значение выражения $2a + b$?

Ответ: -10.

Решение. Перенося члены $2ab$ и $3ab$ в правые части уравнений и перемножая полученные уравнения, имеем $\frac{a^3}{b} \cdot \frac{b^3}{2a} = (16 + 2ab)(25 - 3ab)$, $\frac{13}{2}(ab)^2 - 2(ab) - 400$. Уравнения является квадратным относительно ab. Его корни – это $ab = -\frac{100}{13}$ и $ab = 8$. Теперь можно выразить b и подставить в первое уравнение исходной системы.

Если $b = \frac{8}{a}$ then $\frac{a^4}{8} = 16 + 16$, $a^4 = 256$, $a = \pm 4$, и мы получаем два решения $(4; 2)$ и $(-4; -2)$.

Если $b = -\frac{100}{13a}$, то $-\frac{13a^4}{100} = 16 - \frac{200}{13}$, $a^4 = -\frac{800}{169}$, и решений в этом случае нет.

Наименьшее возможное значение $2a + b$ равно -10.

6. Найдите наименьшее значение a такое, что уравнения $3ax^2 - 5x + 2a = 0$ и $2x^2 + ax - 3 = 0$ имеют общий корень.

Ответ: -1.

Решение. Пусть x_0 – общий корень двух уравнений. Это означает, что числа a и x_0 удовлетворяют системе уравнений $3ax_0^2 - 5x_0 + 2a = 0$, $2x_0^2 + ax_0 - 3 = 0$. Выражая a из первого уравнения, получаем $a = \frac{5x_0}{3x_0^2+2}$. Подставляя его во второе уравнение, мы находим $2x_0^2 + \frac{5x_0^2}{3x_0^2+2} - 3 = 0$, следовательно, $x_0^4 = 1$ и $x_0 = \pm 1$. Если $x_0 = 1$, то $a = 1$, а если $x_0 = -1$, то $a = -1$. Минимальное значение a равно -1.

7. Диагонали параллелограмма равны 22 и 13, а один из его углов равен $\arcsin \frac{20}{29}$. Найдите площадь параллелограмма.

Ответ: 75.

Решение. Пусть стороны параллелограмма равны x и y; обозначим также $\arcsin \frac{20}{29} = \psi$. Тогда $\cos\psi = \sqrt{1 - \left(\frac{20}{29}\right)^2} = \frac{21}{29}$. Дважды применяя теорему косинусов, получаем $x^2 + y^2 - 2xy \cdot \frac{21}{29} = 13^2$, $x^2 + y^2 - 2xy \cdot \left(-\frac{21}{29}\right) = 2^2$. Вычитая первое уравнение из второго, имеем $\frac{84}{49}xy = 315$. Площадь параллелограмма равна $xy\sin\psi = \frac{29}{84} \cdot 315 \cdot \frac{20}{29} = 75$.

8. X и Y – трёхзначные числа. Если X написать перед Y, то полученное шестизначное число делится на Y, и частное от деления равно 601. Если Y написать перед X и полученное число разделить на X, частное равно 1667, а остаток равен 306. Найдите Y.

Ответ: 765.

Решение. Из условия следует, что $1000x + Y = 601Y$, $1000Y + X = 1667X + 306$. Выражая Y из первого уравнения, получаем $Y = \frac{5X}{3}$. Подставляем это выражение во второе уравнение и находим $\frac{5000X}{3} = 1666X + 306$, $X = 459$, and $Y = 765$.

Вариант 4.

1. Сумма десятого, двадцать восьмого и тридцать первого членов арифметической прогрессии равна (-19). Найдите сумму первых сорока пяти членов этой прогрессии.

   Ответ: -285.

   Решение. Обозначим члены прогрессии как $a_1, a_2, \ldots$, а её общий знаменатель назовём d. Из условия следует, что $a_{10} + a_{28} + a_{31} = -19$, $a_1 + 9d + a_1 + 27d + a_1 + 30d = -19$, $3a_1 + 66d = -19$. Теперь можно вычислить искомую сумму: $a_1 + a_2 + \ldots + a_{45} = \frac{a_1 + a_{45}}{2} \cdot 45 = \frac{a_1 + a_1 + 44d}{2} \cdot 45 = 15\,(3a_1 + 66d) = 15 \cdot (-19) = -285$.

2. Основания трапеции равны 14 и 29, а боковые стороны равны 26 и 37. Найдите площадь трапеции.

   Ответ: 447,2.

   Решение. Пусть $ABCD$ данная трапеция, в которой $AD = 14$, $CD = 37$, $BC = 29$, $AB = 26$. Проведём прямую, проходящую через точку D параллельно прямой AB, и пусть M – точка её пересечения с прямой BC. Четырёхугольникl $ABMD$ – параллелограмм, следовательно $DM = AB = 26$, $CM = BC - BM = 29 - 14 = 15$. Нам известны все стороны треугольника CDM: $CM = 15$, $CD = 37$, $DM = 26$. Полупериметр этого треугольника равен 39, а его площадь равна $A = \sqrt{39(39-15)(39-37)(39-26)} = 156$. Следовательно, высота h этого треугольника, опущенная из вершины D, равна $h = \frac{2A}{CM} = \frac{2 \cdot 156}{15} = \frac{104}{5}$. Теперь можно вычислить площадь трапеции. Она равна $\frac{AD+BC}{2}h = \frac{14+29}{2} \cdot \frac{104}{5} = 447{,}2$.

3. Найдите все значения параметра a такие, что уравнение $9^x + (1+a) \cdot 3^x + 3 - 2a = 0$ имеет ровно одно решение. В ответе укажите наименьшее натуральное значение a. Если никакое натуральное значение a не удовлетворяет указанному выше условию, запишите вместо этого 2022.

   Ответ: 2.

   Решение. Уравнение является квадратным по отношению к $t = 3^x$. Его дискриминант D равен $(1+a)^2 - 4(3-2a) = a^2 + 10a - 11$.

   Если $D < 0$, то уравнение не имеет решений. Если $D = 0$, то есть две возможности. При $a = 1$ получаем уравнение $9^x + 2 \cdot 3^x + 1 = 0$, которое не имеет решений. Если $a = -11$, то получаем $9^x - 10 \cdot 3^x + 25 = 0 \Leftrightarrow 3^x = 5$, т.е. у уравнения ровно одно решение.

   Если $D > 0$ (что возможно при $a < -11$ или $a > 1$), то есть два различных значения t_1 и t_2, удовлетворяющие уравнению. Если вспомнить, что нас интересуют только натуральные значения параметра a, то выходит, что нам надо рассмотреть только $a \geqslant 2$. Для того, чтобы у (исходного) уравнения было ровно одно решение x, уравнение относительно t должно иметь два корня такие, что $t_1 \leqslant 0$ и $t_2 > 0$. Но по теореме Виета, $x_1 x_2 = 3 - 2a < 0$, если $a \geqslant 2$. Это означает, что все значения $a \geqslant 2$ удовлетворяют условию, и наименьшее натуральное значение параметра – это $a = 2$.

4. Решите неравенство

$$\frac{\log_5^2 x + \log_5 x - 4}{\log_5(0.2x)} + \frac{8\log_5^2 x - 32\log_5 x + 5}{\log_5(x/625)} \leqslant 9\log_5 x + 2.$$

   В ответе укажите сумму длин всех полученных промежутков. Если же присутствует хотя бы один бесконечный интервал, напишите вместо этого 2022.

   Ответ: 620,2.

Решение. Пусть $\log_5 x = t$. Тогда неравенство принимает вид

$$\frac{t^2+t-4}{t-1}+\frac{8t^2-32t+5}{t-4}\leqslant 9t+2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\left(t^2+t-4\right)(t-4)+\left(8t^2-32t+5\right)(t-1)-(9t+2)\left(t^2-5t+4\right)}{(t-1)(t-4)}\leqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3t+3}{(t-1)(t-4)}\leqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\leqslant -1, \\ 1<t<4. \end{array}\right.$$

Далее находим значения x:

$$\left[\begin{array}{l} \log_5 x\leqslant -1, \\ 1<\log_5 x<4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x\leqslant \dfrac{1}{5}, \\ 5<x<625. \end{array}\right.$$

Сумма длин промежутков равна $\left(\frac{1}{5}-0\right)+(625-5)=620{,}2$.

5. Числа a, b удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 9a^4+4a^2b+3=0, \\ 9a^2b^2+4b^3+27=0. \end{cases}$$

Каково наименьшее возможное значение выражения $a+3b$?

Ответ: -10.

Решение. Вычтем второе уравнение из первого, умноженного на 9. В итоге получаем уравнение $81a^4+36a^2b-9a^2b^2-4b^3=0$, в котором далее раскладываем на множители левую часть $9a^2\left(9a^2-b^2\right)+4b\left(9a^2-b^2\right)=0$, $\left(9a^2+4b\right)(3a-b)(3a+b)=0$. Следовательно, есть три возможности: $9a^2+4b=0$ or $3a-b=0$ or $3a+b=0$. Выражаем b и подставляем в первое уравнение исходной системы.

Если $b=-\frac{9a^2}{4}$, то $3=0$, и в этом случае решений нет.

Если $b=3a$, то

$$9a^4+12a^3+3=0 \Leftrightarrow \left(3a^4+3a^3\right)+\left(a^3+1\right)=0 \Leftrightarrow 3a^3(a+1)+(a+1)\left(a^2-a+1\right)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a+1)\left(3a^3+a^2-a+1\right)=0 \Leftrightarrow (a+1)\left(\left(a^3+a^2\right)+\left(a^3-a\right)+\left(a^3+1\right)\right)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a+1)^2\left(a^2+a^2-a+a^2-a+1\right)=0 \Leftrightarrow a=-1.$$

Получаем решение $(-1;-3)$.

Если $b=-3a$, то имеем $9a^4-12a^3+3 \Leftrightarrow (a-1)^2\left(9a^2+6a+3\right)=0 \Leftrightarrow a=1$. Получаем ещё одно решение $(1;-3)$.
Значит, наименьшее значение выражения $a+3b$ равно -10.

6. Четырёхугольник $PQRS$ вписан в окружность радиуса 32.5. Известно, что $PS:SR=16:63$, $\angle PQR=90^\circ$, а периметр четырёхугольника $PQRS$ равен 168. Найдите площадь четырёхугольника.

Ответ: 1428.

Решение. Так как $\angle PQR=90^\circ$, PR является диаметром окружности и $PR=2\cdot 32.5=65$. Пусть $PS=16x$, тогда $RS=63x$. По теореме Пифагора для треугольника PRS получаем $(16x)^2+(63x)^2=65^2$, поэтому $x=1$, $PS=16$, $RS=63$. Поскольку периметр четырёхугольника равен 168, имеем $PQ+QR=168-16-63=89$. Если обозначить $PQ=y$, то $QR=89-y$, и в силу теоремы Пифагора $y^2+(89-y)^2=65^2$, $y^2-89y+1848=0$, поэтому $y=33$ или $y=56$. Это означает, что одна из сторон PQ, QR равна 33, а вторая равна 56. Площадь $PQRS$ равна сумме площадей прямоугольных треугольников PQR и PSR, т.е. $\frac{56\cdot 33}{2}+\frac{16\cdot 63}{2}=1428$.

7. Решите уравнение $\sin 2x + 2\sin 4x = \operatorname{tg} 6x \cos 2x$. В ответе укажите количество его корней на промежутке $10\pi < x < 40\pi$.

Ответ: 239.

Решение. Уравнение эквивалентно следующим:

$$\begin{cases}(\sin 2x + 2\sin 4x)\cos 6x = \sin 6x \cos 2x,\\ \cos 6x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\sin 4x \cos 6x = \sin 6x \cos 2x - \cos 6x \sin 2x,\\ \cos 6x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\sin 4x \cos 6x = \sin 4x,\\ \cos 6x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin 4x = 0,\\ \cos 6x = 0.5,\end{array}\right.\\ \cos 6x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z},\\ \cos 6x \neq 0,\end{cases}\\ x = \pm\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Ясно, что ограничение $\cos 6x \neq 0$ существенно только для случая $\sin 4x = 0$. Если мы рассмотрим этот случай, то из уравнения получаем $x = \frac{\pi k}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$, поэтому $\cos 6x = \cos \frac{3\pi k}{2}$, что равно 0, если k нечётное число, и равно ± 1, если k чётное. Следовательно, $k = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$, и корнями уравнения являются числа $x = \frac{\pi m}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$.
Полученные выше множества решений не пересекаются друг с другом.И правда, если мы приравняем корни, то получим $\frac{\pi m}{2} = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3} \Leftrightarrow 6m = \frac{2}{3} + 4n$, что невозможно, так как левая часть уравнения целая, а правая – нет.
Чтобы найти количество целочисленных корней, рассматриваем неравенства $10\pi < \frac{\pi m}{2} < 40\pi$ и $10\pi < \pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3} < 40\pi$. Из первого неравенства $20 < m < 80$, а из второго $\mp\frac{1}{6} + 30 < n < \mp\frac{1}{6} + 120$. Есть 59 различных значений m и 180 значений n (по 90 для каждого знака). Следовательно, имеем $59 + 180 = 239$ целочисленных решений на интервале $10\pi < x < 40\pi$.

8. k – натуральное число. Если мы к числу k добавим 1000, получим точный квадрат. Если к числу k добавим 1532, то также получим точный квадрат. Найдите наименьшее возможное значение k.

Ответ: 16 424.

Решение. Пусть $k+1000l^2$ и $k+1532 = m^2$. Без ограничения общности можем считать, что l и m – целые положительные числа. Вычитая первое уравнение из второго, получаем $532 = m^2 - l^2$, $(m-l)(m+l) = 2^2 \cdot 7 \cdot 19$. Числас $m+l$ и $m-l$ – оба чётные или оба нечётные. Поскольку их произведение чётно, оба они должны быть чётными. Можем также отметить, что $m+l > m-l$. Следовательно, есть только две возможности:

$$\begin{cases}m + l = 38,\\ m - l = 14\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}m + l = 266,\\ m - l = 2.\end{cases}$$

Решая эти системы, находим $m = 26$, $l = 12$ или $m = 134$, $l = 132$. Соответствующие значения k равны -856 и $16\,424$. Так как k – натуральное число, оно не может быть отрицательным, поэтому $k = 16\,424$.