Вариант 1

1. **[2 балла]** Рассмотрим все 6-значные числа, записанные с помощью цифр 1, 2, 3, 4. В скольких из них присутствуют четыре различные цифры?

   Ответ: 1 560.

   Решение. Если мы используем одну из цифр трижды, а оставшиеся цифры по одному разу, то мы сможем составить $4 \cdot \frac{6!}{3!} = 480$ различных чисел. (Есть 4 способа выбрать одну из цифр, которая будет использована трижды. Если бы все цифры были различными, то было бы 6! способов их расстановки, но так как среди них есть три одинаковые, количество перестановок получается в 3! раз меньше.)

   Если мы используем одну из цифр дважды, ещё одну дважды, а оставшиеся цифры по одному разу, то получим $\binom{4}{2} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 2!} = 1\,080$ чисел. И вправду, есть $C_4^2 = 6$ способов выбрать две цифры, которые будут использованы дважды, а затем есть $\frac{6!}{2! \cdot 2!}$ способов расстановки цифр.

   Следовательно, всего есть $480 + 1\,080 = 1\,560$ чисел, которые удовлетворяют условию задачи.

2. **[2 балла]** Длина, ширина и высота прямоугольного параллелепипеда – попарно различные целые числа. Если его длину увеличить на 40%, его высоту увеличить на 75%, а его ширину уменьшить на 20%, то его объём станет на 57,6 больше начального объёма.Найдите наибольшую возможную ширину этого прямоугольного параллелепипеда.

   Ответ: 30.

   Решение. Пусть x, y, z – длина, высота и ширина прямоугольного параллелепипеда соответственно. После того как все его измерения поменялись, новые их значения – это $1{,}4x$, $1{,}75y$, $0{,}8z$. ПО условию получаем $1{,}4x \cdot 1{,}75y \cdot 0{,}08z - xyz = 57{,}6$, и поэтому $xyz = 60$. Так как x, y, z – попарно различные целые числа, наибольшее значение y равно 30 (а оставшиеся измерения равны 1 и 2).

3. **[2 балла]** В бочонке 50 литров 100% щёлочи. В первый день некоторое количество щёлочи взяли из бочонка, заменив его тем же количеством воды, после чего раствор тщательно перемешали. На следующий день некоторое количество раствора взяли из бочонка, и тоже заменили его водой. Известно, что концентрация полученного раствора щёлочи равна 31,68%, а также, что количество жидкости, взятое из бочонка во второй день, в два раза больше, чем в первый день. Сколько литров щёлочи было взято из бочонка в первый день? (Все количества измеряются в литрах, указана объёмная концентрация.)

   Ответ: 14.

   Решение. Обозначим количество щёлочи, взятой из бочонка в первый день, через x (литров). После того, как бочонок наполнили водой, доля щёлочи в бочонки становится равна $\frac{50-x}{50}$. Затем на второй день из бочонка взяли $2x$ литров смеси. Из них $2x \cdot \frac{50-x}{50}$ составляет щёлочь. Следовательно, остаётся $50 - x - \frac{50x - x^2}{25}$ литров щёлочи, что должно составить $50 \cdot 0.3168 = 15.84$ литров согласно условию. Отсюда получаем уравнение $50 - x - \frac{50x - x^2}{25} = 15.84$, $x^2 - 75x + 854 = 0$, которое имеет два решения: $x = 61$ и $x = 14$. Первое из них не удовлетворяет условию, следовательно, искомое количество равно 14 литрам.

4. **[3 балла]** В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD равны друг другу, а $\operatorname{tg} \angle CAD = 7$. Найдите высоту трапеции, если известно, что её площадь равна 63.

   Ответ: 21.

   Решение. Пусть CH и BK – высоты трапеции. Обозначим также $\angle CAD = \alpha$ (из условия мы знаем, что $\operatorname{tg} \alpha = 7$). Так как трапеция равнобедренная, треугольники ABK и DCH равны между собой. Следовательно, $AK = DH$ и $\frac{BC+AD}{2} = \frac{HK+AD}{2} = \frac{HK+AH+HD}{2} = \frac{AH+AH}{2} = AH$. Площадь трапеции S равна $\frac{BC+AD}{2} \cdot CH = AH \cdot CH = AC \cos \alpha \cdot AC \sin \alpha$. Поскольку $\operatorname{tg} \alpha = 7$, получаем $\cos \alpha = \frac{1}{7} \sin \alpha$, а значит, $A = \frac{1}{7} AC^2 \sin^2 \alpha$. По условию $S = 63$, следовательно $63 =$

$\frac{1}{7}AC^2\sin^2\alpha$, $AC\sin\alpha = 21$. Остаётся заметить, что $AC\sin\alpha$ равно высоте трапеции, поэтому 21 и есть ответ задачи.

5. **[3 балла]** Сколько целых значений x удовлетворяет неравенству $\sqrt{\sqrt{2x+\frac{9}{4}}+\frac{3}{2}} \geqslant x$?

   Ответ: 4.

   Решение. Область допустимых значений исходного неравенства задаётся условием $\sqrt{2x+\frac{9}{4}} \geqslant -\frac{3}{2}$, которое равносильно неравенству $2x+\frac{9}{4} \geqslant 0$, откуда $x \geqslant -\frac{9}{8}$.
   Значения $x \in [-\frac{9}{8};\ 0]$ удовлетворяют исходному неравенству (так как левая часть неотрицательна, а правая часть неположительна), а при $x>0$ оно равносильно неравенству $\sqrt{2x+\frac{9}{4}} \geqslant x^2-\frac{3}{2}$.
   При $x \in \left(0;\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ правая часть неположительна, и неравенство выполнено. Если же $x > \sqrt{\frac{3}{2}}$, то неравенство равносильно каждому из неравенств $2x+\frac{9}{4} \geqslant x^4-3x^2+\frac{9}{4}$, $x^4-3x^2-2x \leqslant 0$, $x^3-3x-2 \leqslant 0$, $(x+1)^2(x-2) \leqslant 0$, откуда $x \leqslant 2$.
   Подводя итоги, получаем $x \in \left[-\frac{9}{8};\ 0\right] \cup \left(0;\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right] \cup \left(\sqrt{\frac{3}{2}};\ 2\right]$, т.е. множество решений неравенства – отрезок $\left[-\frac{9}{8};\ 2\right]$. На этом отрезке есть 4 целых числа.

6. **[3 балла]** Решите уравнение $\sqrt{8\sin\frac{2\pi x}{3}+\frac{13}{3}} = 2\cos\frac{2\pi x}{3}+2\operatorname{tg}\frac{2\pi x}{3}$. В ответе укажите наибольший отрицательный корень. Если его не существует, напишите вместо этого 2023.

   Ответ: $-0{,}25$.

   Решение. Возводя в квадрат обе части уравнения, получаем

$$8\sin\frac{2\pi x}{3}+\frac{13}{3} = 4\cos^2\frac{2\pi x}{3}+8\sin\frac{2\pi x}{3}+4\operatorname{tg}^2\frac{2\pi x}{3},$$

   откуда $12\cos^4\frac{2\pi x}{3}-25\cos^2\frac{2\pi x}{3}+12=0$, откуда $\cos^2\frac{2\pi x}{3}=\frac{3}{4}$ или $\cos^2\frac{2\pi x}{3}=\frac{4}{3}$. Поскольку $\cos^2\frac{2\pi x}{3} \leqslant 1$, то $\cos\frac{2\pi x}{3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \pm\frac{1}{4}+\frac{3}{2}k$, $k \in \mathbb{Z}$. Подстановка полученных значений x в исходное уравнение показывает, что при $x=\pm\frac{5}{4}+3k$ правая часть исходного уравнения отрицательна, и решениями являются лишь $x=\pm\frac{1}{4}+3k$, $k \in \mathbb{Z}$ (при которых правая часть положительна). Следовательно, наибольший отрицательный корень – это $-\frac{1}{4}=-0{,}25$.

7. **[3 балла]** При каком наименьшем значении параметра t уравнение $x^2-tx\sqrt{3-2x-x^2}+t^2=0$ имеет хотя бы одно решение?

   Ответ: -1.

   Решение. Уравнение имеет смысл при $3-2x-x^2 \geqslant 0$. Выделив в левой части полный квадрат, уравнение можно привести к виду

$$\left(x-\frac{t\sqrt{3-2x-x^2}}{2}\right)^2+\frac{t^2(x+1)^2}{4}=0.$$

   Так как оба слагаемых в правой части неотрицательны, равенство возможно, только если они оба равны нулю. Второе слагаемое обращается в ноль либо при $x=-1$, либо при $t=0$. Если $x=-1$, то первое слагаемое принимает вид $(-t-1)^2$, поэтому $t=-1$. Если $t=0$, то уравнение принимает вид $x^2=0$, и у него есть одно решение $x=0$. Следовательно, данное уравнение при $t=0$ имеет решение $x=0$, при $t=-1$ имеет решение $x=-1$, а при остальных t не имеет решений. Наименьшее значение параметра, при котором есть решение – это $t=-1$.

8. **[3 балла]** Решите неравенство

$$\frac{1}{\left|\log_2\frac{x}{10}\right|-2} \leqslant \frac{1}{\left|\log_4\frac{x^2}{400}\right|-1}.$$

В ответе укажите количество целочисленных решений неравенства на отрезке $-4 \leqslant x \leqslant 54$.

Ответ: 41.

Решение. Логарифмы в неравенстве существуют при $x > 0$. Поскольку $\log_4 \frac{x^2}{400} = \log_2 \frac{x}{20} = \log_2 \frac{x}{10} - 1$, неравенство принимает вид

$$\frac{1}{\left|\log_2 \frac{x}{10}\right| - 2} \leqslant \frac{1}{\left|\log_2 \frac{x}{10} - 1\right| - 1}.$$

Полагая $\log_2 \frac{x}{10} - 1 = t$, получаем

$$\frac{1}{|t+1| - 2} \leqslant \frac{1}{|t| - 1}. \qquad (1)$$

Рассмотрим три возможных случая: $t \leqslant -1$, $-1 < t < 0$, $t \geqslant 0$.

1) При $t \leqslant -1$ неравенство (1) равносильно каждому из неравенств $\frac{1}{-t-3} \leqslant \frac{1}{-t-1}$, $\frac{1}{t+3} \geqslant \frac{1}{t+1}$, $\frac{2}{(t+3)(t+1)} \leq 0$, откуда $-3 < t < 1$, т. е. $-3 < \log_2 \frac{x}{10} - 1 < -1$, $\frac{1}{4} < \frac{x}{10} < 1$, $\frac{5}{2} < x < 10$.

2) Если $-1 < t < 0$, то из (1) следует, что $\frac{1}{t-1} \leqslant \frac{1}{-t-1}$ или $\frac{2t}{(t+1)(t-1)} \leqslant 0$, откуда $t < -1$ или $0 \leqslant t < 1$. В этом случае неравенство (1) не имеет решений.

3) При $t \geqslant 0$ из (1) следует, что $\frac{1}{t-1} \leqslant \frac{1}{t-1}$. Это неравенство является верным при всех $t \geqslant 0$, кроме $t = 1$. Отсюда $\log_2 \frac{x}{10} \geqslant 1$ и $\log_2 \frac{x}{10} \neq 2$, следовательно, $x \in [20; +\infty)$ и $x \neq 40$.

Итак, множеством решений неравенства является $x \in \left(\frac{5}{2}; 10\right) \cup [20; 40) \cup (40; +\infty)$. На отрезке $[-4; 54]$ есть 41 целое решение.

Вариант 2.

1. **[2 балла]** Стороны треугольника равны 4, 13 и 15. Найдите радиусы его описанной окружности R и его вписанной окружности r. В ответе запишите разность $R - r$.

   Ответ: 6,625.

   Решение. Полупериметр треугольника p равен $\frac{4+13+15}{2} = 16$, поэтому его площадь A есть $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{16 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 1} = 24$. Радиус описанной окружности – это $R = \frac{abc}{4A} = \frac{4 \cdot 13 \cdot 15}{4 \cdot 24} = \frac{65}{8}$. Радиус вписанной окружности – это $r = \frac{A}{p} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$. Следовательно, $R - r = \frac{53}{8} = 6.625$.

2. **[3 балла]** Высота прямого кругового конуса равна $\frac{18}{\pi}$, а радиус его основания равен 3. Найдите наибольшее значение объёма прямого кругового цилиндра, который можно вписать в этот конус. (Одно из оснований цилиндра лежит в основании конуса, а окружность второго основания – на боковой поверхности конуса.)

   Ответ: 24.

   Решение. Пусть ABC – осевое сечение конуса (AB – его основание) и пусть $KLMN$ – осевое сечение цилиндра, вписанного в конус такое, что $K \in AC$, $L \in BC$, $M, N \in AB$. Обозначим также $KL = 2r$, $KN = h$. Из подобия треугольников получаем уравнения $\frac{h}{18/\pi} = \frac{AK}{AC}$, $\frac{r}{3} = \frac{CK}{AC}$.
   Складывая эти равенства, имеем $\frac{\pi h}{18} + \frac{r}{3} = 1$ и, следовательно, $h = \frac{18}{\pi} - \frac{6r}{\pi}$.
   Объём цилиндра V равен $V = \pi r^2 h = 18r^2 = 6r^3$. Чтобы найти его максимум, вычисляем производную $V'(r) = 36r - 18r^2 = 18r(2-r)$ и заметим, что производная положительна при $r < 2$, отрицательна при $r > 2$. Значит, $r = 2$ –точка максимума, а наибольший объём равен $V(2) = 24$.

3. **[2 балла]** Велосипедисту едет из далёкой деревни на паромный терминал, чтобы успеть на паром. Сначала он едет со скоростью 12 км/ч, а когда до отправления парома остаётся 10 минут, он увеличивает скорость до 16 км/ч. В результате он опаздывает на 5 минут. За сколько минут до отправления парома ему нужно было увеличить скорость до 16 км/ч, чтобы прибыть в паромный терминал с запасом в 5 минут (т.е. за 5 минут до отправления парома)?

   Ответ: 50.

   Решение. Будем считать, что велосипедист увеличивает скорость в момент времени $t = 0$. Он прибывает в терминал через 15 минут, при этом он едет со скоростью 16 км/ч, поэтому он находится на расстоянии $\frac{1}{4} \cdot 16 = 4$ км от терминала.
   Пусть для того чтобы прибыть в терминал за 5 минут до отправления паром ему надо было увеличить скорость в момент времени $(-t_0)$ (т. е. на t_0 минут раньше, чем он на самом деле это сделал). В этот момент он находился на расстоянии $4 + \frac{t_0}{5}$ от терминала. При езде со скоростью 16 км/ч он бы преодолел это расстояние за $\left(4 + \frac{t_0}{5}\right) : 16 = \frac{1}{4} + \frac{t_0}{80}$ часов, то есть за $60\left(\frac{1}{4} + \frac{t_0}{80}\right) = 15 + \frac{3t_0}{4}$ minutes.
   Поскольку ему надо прибыть за 5 минут до отправления парома, получаем уравнение $-t_0 + 15 + \frac{3t_0}{4} = 5$, и поэтому $t_0 = 40$. Следовательно, он должен был увеличить скорость на 40 минут ранее, чем он это сделал, то есть за 50 минут до отправления парома.

4. **[2 балла]** Сколько существует шестизначных чисел, записанных с помощью цифр 1, 3, 5, 7, 9 и таких, что хотя бы две одинаковые цифры идут подряд?

   Ответ: 10 505.

   Решение. Общее количество таких чисел равно 5^6 (выбираем одну из 5 цифр для каждого из 6 мест). Чтобы получить число, у которого нет рядом стоящих одинаковых цифр, можем выбрать первую цифру пятью способами. После этого каждую из следующих цифр можем выбирать четырьмя способами (так как нельзя использовать цифру, стоящую на предыдущей позиции). Количество таких чисел равно $5 \cdot 4^5$. Очевидно, все остальные числа имеют хотя бы две одинаковые цифры подряд, а их количество равно $5^6 - 5 \cdot 4^5 = 10\,505$.

5. **[3 балла]** Найдите все решения уравнения

$$\frac{\sin 6\pi x}{\sin \pi x + \cos \pi x} = \frac{\cos 6\pi x}{\cos \pi x - \sin \pi x},$$

принадлежащие интервалу $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. В ответе укажите сумму найденных решений. Если решений на интервале нет, запишите 2023.

Ответ: 0,5.

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sin 6\pi x(\cos \pi x - \sin \pi x) = \cos 6x(\sin \pi x + \cos \pi x)$$

при условии $(\sin \pi x + \cos \pi x)(\cos \pi x - \sin \pi x) \neq 0$, т. е. $\cos 2\pi x \neq 0$. Имеем:

$$\sin 6\pi x \cos \pi x - \cos 6\pi x \sin \pi x = \cos 6\pi x \cos \pi x + \sin 6\pi x \sin \pi x,$$

$$\sin 5\pi x = \cos 5\pi x, \quad \operatorname{tg} 5\pi x = 1, \quad x = \frac{1}{20} + \frac{n}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Условиям $0 < x < \frac{1}{2}$, $\cos 2\pi x \neq 0$ удовлетворяют $x = \frac{1}{20}$ и $x = \frac{9}{20}$. Сумма этих чисел равна 0,5.

6. **[3 балла]** Сколько целых значений x удовлетворяет неравенству $\log_{0,5}\left(3 - \sqrt{2^{-x} - 1}\right) > x$?

Ответ: 2.

Решение. Неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 2^{-x} - 1 \geqslant 0, \\ 3 - \sqrt{2^{-x} - 1} > 0, \\ 3 - \sqrt{2^{-x} - 1} < 2^{-x}. \end{cases}$$

Положив $y = 2^{-x}$, получаем $y \geqslant 1$, $\sqrt{y-1} < 3$, $3 - y < \sqrt{y-1}$. Из первых двух неравенств получаем, что $1 \leqslant y < 10$. А третье неравенство можно решить, например, так:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3 - y < 0, \\ y - 1 \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 3 - y \geqslant 0, \\ (3-y)^2 < y - 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y > 3, \\ \begin{cases} y \leqslant 3, \\ 2 < y < 5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow y > 2$$

Итак, $2 < y < 10$, поэтому $2 < 2^{-x} < 10$, $1 < -x < \log_2 10$, $x \in (-\log_2 10; -1)$. На этом промежутке два целых значения переменной – это $x = -3$ и $x = -2$.

7. **[3 балла]** Найдите количество целых значений параметра t, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^4 + x^2 - 5t^2} = \sqrt{x^4 - 4tx}$ имеет ровно одно решение.

Ответ: 3.

Решение. Уравнение эквивалентно уравнению $x^4 + x^2 - 5t^2 = x^4 - 4tx$ при условии $x^4 - 4tx \geqslant 0$. Решениями уравнения являются $x_1 = -5t$ и $x_2 = t$. При подстановке x_1 в неравенство получаем $x(x^3 - 4t) = 5t^2(125t^2 + 4) \geqslant 0$, что выполнено при любых значениях t. Значит, $x_1 = -5t$ является корнем при любом t. Для значения $x_2 = t$ получаем $x(x^3 - 4t) \geqslant 0$, $t^2(t^2 - 4) \geqslant 0$, что верно при $t \in (-\infty; -2] \cup 0 \cup [2; \infty)$. Корни $x_1 = -5t$ и $x_2 = t$ совпадают при $t = 0$. Поэтому исходное уравнение имеет два различных корня при $t \leqslant -2$ или $t \geqslant 2$; один корень при $-2 < t < 2$. Итак, условию задачи удовлетворяют три целых значения параметра.

8. **[3 балла]** Диагонали четырёхугольника $PQRS$ пересекаются в точке O. Известно, что $PR \perp QS$, $PS \parallel QR$, $QR = 91$, $OS = 12$, а радиус окружности, вписанной в треугольник ORS, равен 5. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник OPS.

Ответ: 2.

Решение. Рассмотрим треугольник ORS. Пусть A, B, C – точки касания вписанной окружности треугольника ABC с его сторонами OS, OR, RS соответственно. Пусть $BR = x$. Так как $\angle O = 90^\circ$, $OA = OB = r = 5$. Используя равенство отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, получаем $CR = BR = x$, $AS = OS - r = 7$, $CS = AS = 7$. Значит, $OR = x + 5$, $OS = 12$, $RS = x + 7$, и по теореме Пифагора получаем $(x+7)^2 = (x+5)^2 + 12^2$. Решая полученное уравнение, находим $x = 30$ and $OR = 35$.

Теперь мы знаем две стороны прямоугольного треугольника OQR, и поэтому можем найти, что $OQ = \sqrt{QR^2 - OR^2} = \sqrt{91^2 - 35^2} = 84$; следовательно, радиус вписанной окружности треугольника OQR равен $\frac{84+35-91}{2} = 14$.

Треугольники OSP и OQR подобны, а их коэффициент подобия равен $\frac{OS}{OQ} = \frac{12}{84} = \frac{1}{7}$. Итак, радиус окружности, вписанной в треугольник OPS есть $\frac{1}{7} \cdot 14 = 2$.

Вариант 3

1. **[2 балла]** Вася шёл в школу не торопясь, и первую треть пути он прошёл со скоростью 2,16 км/ч. Поняв, что с такой скоростью он опоздает, он увеличил скорость до 10,08 км/ч и пробежал треть пути с этой скоростью. После этого Вася устал, и уменьшил скорость до 7,56 км/ч, и оставшуюся треть пути он проделал с этой скоростью. Определите среднюю скорость Васи по пути в школу.

   Ответ: 4,32 км/ч (или 1,2 м/с).

   Решение. Обозначим путь, который проделал Василий по пути в школу через $3S$ (км). Тогда он затратил $\frac{S}{2{,}16}$ часов на первую часть пути, $\frac{S}{10{,}08}$ часов на вторую часть пути и $\frac{S}{7.56}$ часов на третью часть. Суммарно ему потребовалось $t = \frac{S}{2{,}16} + \frac{S}{10{,}08} + \frac{S}{7{,}56} = \frac{25S}{36}$ часов. Отсюда его средняя скорость была равна $\frac{3S}{t} = \frac{108}{25} = 4{,}32$ км/ч.

2. **[2 балла]** Три числа X, Y, Z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Если из них вычесть 9, 18, 27 соответственно, то полученные числа образуют геометрическую прогрессию (в том же порядке). Найдите наибольшее возможное значение разности арифметической прогрессии. Если его не существует, укажите в ответе 2023.

   Ответ: 9.

   Решение. Три числа образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда среднее из них равно полусумме остальных. Три числа образуют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда квадрат среднего числа равен произведению двух других. Отсюда получаем уравнения $2Y = X + Z$ и $(Y-18)^2 = (X-9)(Z-27)$. Из первого уравнения можно выразить, что $Z = 2Y - X$, и подставляя это во второе уравнение, получаем

$$(Y-18)^2 = (X-9)(2Y-X-27) \Leftrightarrow X^2+Y^2-2XY+18X-18Y+81=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (X-Y)^2+18(X-Y)+81=0 \Leftrightarrow (X-Y+9)^2=0 \Leftrightarrow Y-X=9.$$

   Но разность арифметической прогрессии равна разности двух её соседних членов, и поэтому мы получаем один-единственный вариант: разность равна $Y - X = 9$.

3. **[2 балла]** К параболе $y = 2x^2 - 3x$ проведены касательные в её точках пересечения с осью абсцисс. Найдите площадь треугольника, образованного этими касательными и прямой $y = 0$.

   Ответ: 1,6875.

   Решение. Абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox находятся из уравнения $2x^2 - 3x = 0$, откуда получаем два решения $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{3}{2}$. Так как $y'(x) = 4x - 3$, получаем, что $y'(x_1) = -3$ и $y'(x_2) = 3$. Эти числа и есть угловые коэффициенты искомых касательных, поэтому уравнения касательных имеют вид $y = -3x$ и $y = 3\left(x - \frac{3}{2}\right)$. Точка пересечения касательных есть $C\left(\frac{3}{4}; -\frac{9}{4}\right)$, и она является одной из вершин треугольника. Две другие вершины имеют координаты $A(0;0)$ и $B\left(\frac{3}{2};0\right)$. Основание треугольника AB равно $\frac{3}{2}$, а высота, опущенная на него, есть $\frac{9}{4}$. Следовательно, площадь равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{16} = 1{,}6875$.

4. Числа a, b удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 3\sqrt[3]{a^2b^5} = 4(a^2-b^2); \\ 5\sqrt[3]{a^4b} = a^2+b^2. \end{cases}$$

   Какое наибольшее значение может принимать выражение $b - 3a$?

   Ответ: 112.

   Решение. Если $a = 0$, то $b = 0$, и значение выражения равно 0. Если $a \neq 0$, то перемножим уравнения и получим $15a^2b^2 = 4\left(a^4 - b^4\right)$. Обозначим $t = \left(\frac{a}{b}\right)^2$. Тогда $4t^2 - 15t - 4 = 0$, откуда

$t=4$ или $t=-\frac{1}{4}$. Так как $t\geqslant 0$, подходит только первый корень, поэтому $\left(\frac{a}{b}\right)^2=4$, откуда $a=\pm 2b$.
Если $a=2b$, то подставляя в первое уравнение исходной системы, получаем $3\sqrt[3]{4b^7}=4\left(4b^2-b^2\right)$, $\sqrt[3]{4b}=4$, значит, $b=16$ и тогда $a=32$. При этом выражение $(b-3a)$ принимает значение (-80).
Если $a=-2b$, то подставляя в первое уравнение исходной системы, получаем $3\sqrt[3]{4b^7}=4\left(4b^2-b^2\right)$, $\sqrt[3]{4b}=4$, значит, $b=16$ и тогда $a=-32$. При этом выражение $(b-3a)$ принимает значение 112.
Наибольшее возможное значение $(b-3a)$ равно 112.

5. **[3 балла]** В треугольнике ABC известно, что $AB=19$, $BC=20$, $AC=37$. Окружность, вписанная в треугольник, касается его сторон AB и AC в точках Q и P соответственно. Найдите площадь S треугольника APQ. В ответе запишите число $111S$.

Ответ: 5 832.

Решение. Полупериметр треугольника равен $p=\frac{19+20+37}{2}=38$. Следовательно, его площадь равна $S=\sqrt{38(38-19)(38-20)(38-37)}=114$. Обозначим точки касания вписанной окружности со сторонами AB, AC, BC треугольника через Q, P, S соответственно. Известно, что отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны между собой. Поэтому если обозначить $AP=AQ=x$, получаем $BQ=19-x$, $CP=37-x$, а значит, $BC=BS+CS=BQ+CP=(19-x)+(37-x)=56-2x$. Следовательно, $56-2x=20$ и $x=18$. Теперь можем выразить отношение площадей треугольников:

$$\frac{S_{APQ}}{S_{ABC}}=\frac{0{,}5AP\cdot AQ\cdot\sin A}{0{,}5AB\cdot AC\cdot\sin A}=\frac{AP\cdot AQ}{AB\cdot AC}=\frac{18\cdot 18}{19\cdot 37}.$$

Therefore, $S_{APQ}=\frac{324}{19\cdot 37}\cdot 114=\frac{324\cdot 6}{37}$. В ответе следует написать число $111S$; оно равно $324\cdot 6\cdot 3=5\,832$.

6. **[3 балла]** Найдите наименьшее положительное решение уравнения $\frac{\cos(3x)}{\cos x}+\frac{2|\cos x|}{\cos(3x)}=-1$. В ответе укажите найденное решение, умноженное на $\frac{48}{\pi}$.

Ответ: 32.

Решение. Пусть $t=\frac{\cos 3x}{\cos x}$.
а) Если $\cos x>0$, то $\frac{\cos 3x}{\cos x}+\frac{2\cos x}{\cos 3x}=-1$ и уравнение принимает вид $t+\frac{2}{t}=-1$, откуда $t^2+t+2=0$. Это уравнение не имеет действительных корней.
б) Если $\cos x<0$, то $\frac{\cos 3x}{\cos x}-\frac{2\cos x}{\cos 3x}=-1$ и уравнение принимает вид $t-\frac{2}{t}=-1$ или $t^2+t-2=0$, откуда $t_1=-2$, $t_2=1$.
При $t=-2$ получаем $\frac{\cos 3x}{\cos x}=-2$, что эквивалентно уравнению $\frac{4\cos^3 x-3\cos x}{\cos x}=-2$. Так как $\cos x<0$, то $4\cos^2 x-3=-2$, $\cos^2 x=\frac{1}{4}$, $\cos x=-\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.
При $t=1$ имеем $4\cos^2 x-3=1$, $\cos^2 x=1$, $\cos x=-1$, $x=\pi+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.
Наименьшим положительным корнем этого уравнения является $x_0=\frac{2\pi}{3}$, а согласно условию в ответ нужно записать число $\frac{48}{\pi}\cdot x_0=32$.

7. **[3 балла]** Сколько целых значений x из интервала $0<x<100$ удовлетворяет неравенству $\frac{5\log_2^2 x-100}{\log_2^2 x-25}\geqslant 4$?

Ответ: 68.

Решение. Пусть $t=\log_2^2 x$, тогда $\frac{5t-100}{t-25}\geqslant 4\Leftrightarrow\frac{t}{t-25}\geqslant 0$. Отсюда $t\in(-\infty;0]\cup(25;+\infty)$. Возвращаясь к исходной переменной, получаем $x\in\left(0;\frac{1}{32}\right)\cup\{1\}\cup(32;+\infty)$. Среди найденных решений промежутку $x<100$ принадлежат 68.

8. **[3 балла]** Найдите количество целых значений параметра b, при каждом из которых уравнение $\sin^{22}x+(b-3\sin x)^{11}+\sin^2 x+b=3\sin x$ имеет хотя бы одно решение.

Ответ: 7.

Решение. Запишем уравнение в виде $\sin^{22} x + \sin^2 x = (3\sin x - b)^{11} + (3\sin x - b)$. Рассмотрим функцию $f(t) = t^{11} + t$. Тогда уравнение принимает вид $f\left(\sin^2 x\right) = f(3\sin x - b)$. Функция f строго возрастает (как сумма двух строго возрастающих функций). Поэтому равенство значений функции эквивалентно равенству её аргументов, то есть данное уравнение равносильно уравнению $\sin^2 x = 3\sin x - b$. Получаем, что $b = 3\sin x - \sin^2 x$. Остаётся заметить, что функция $y = \sin x$ принимает значения от -1 до 1, а функция $g(y) = 3y - y^2$ возрастает на отрезке $[-1; 1]$ (это можно установить, например, вычислив производную $g'(y) = 3 - 2y > 0$ при $y \in [-1; 1]$), принимая на нем все значения от -4 до 2. Поэтому исходное уравнение имеет решение при $-4 \leqslant b \leqslant 2$. Количество целых значений параметра, удовлетворяющих этому условию, равно 7.

Вариант 4.

1. **[2 балла]** Найдите наибольшее возможное значение выражения $(x+2y)$, если числа x и y удовлетворяют условиям $\sqrt{y}+10x=2{,}4$; $\left(\sqrt{y}-3\right)x=x-0{,}08$.

   Ответ: 38,52.

   Решение. Из первого уравнения можно выразить, что $\sqrt{y}=2{,}4-10x$. Подставляя во второе уравнение, имеем $(-0{,}6-10x)x=x-0{,}08$. Решая квадратное уравнение, получаем $x=-\frac{1}{5}$ или $x=\frac{1}{25}$. Если $x=-\frac{1}{5}$, то $y=\frac{484}{25}$, а значение выражения $(x+2y)$ равно $\frac{963}{25}$. Если $x=\frac{1}{25}$, то $y=4$ и значение выражения $(x+2y)$ равно $\frac{201}{25}$. Следовательно, наибольшее значение $(x+2y)$ – это $\frac{963}{25}=38{,}52$.

2. **[2 балла]** Найдите наибольшее значение выражения $\dfrac{15}{p^{2/3}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{p^4}-8\sqrt[3]{p}\cdot q}{p^{2/3}+2\sqrt[3]{pq}+4q^{2/3}}:\left(8-16\sqrt[3]{\dfrac{q}{p}}\right)$, если известно, что $3\leqslant p\leqslant 5$; $8\leqslant q\leqslant 19$.

   Ответ: 1,875.

   Решение. Данное выражение может быть преобразовано следующим образом:

$$\frac{15}{p^{2/3}}\cdot\frac{p^{4/3}-8p^{1/3}q}{p^{2/3}+2p^{1/3}q^{1/3}+4q^{2/3}}:\frac{8p^{1/3}-16q^{1/3}}{p^{1/3}}=\frac{15}{8}\cdot\frac{p-8q}{\left(p^{2/3}+2p^{1/3}q^{1/3}+4q^{2/3}\right)\left(p^{1/3}-2q^{1/3}\right)}=\frac{15}{8}.$$

   Следовательно, на всей области определения это выражение равно тождественной константе, и его наибольшее значение – это $\frac{15}{8}=1{,}875$.

3. **[2 балла]** Объём правильной треугольной призмы (в основании призмы лежит равносторонний треугольник, а боковые рёбра перпендикулярны основаниям) равен $54\sqrt{3}$. Какое наименьшее значение может принимать сумма длин всех её рёбер?

   Ответ: 54.

   Решение. Пусть рёбра основания равны x, а высота призмы равна h. Объём призмы равен $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot h$. По условию он равен $54\sqrt{3}$, поэтому получаем $\frac{x^2h}{4}=54$, $h=\frac{216}{x^2}$. Теперь выразим сумму длин всех рёбер призмы: $S=3h+6x=\frac{648}{x^2}+6x$. Эта сумма является функцией одной действительной переменной x; её производная равна $S'(x)=-\frac{1296}{x^3}+6$. Несложно видеть, что производная отрицательна при $x<6$, обращается в ноль при $x=6$ и положительна при $x>6$. Следовательно, $x=6$ – точка минимума функции $S(x)$, а наименьшее значение S – это $S(6)=\frac{648}{36}+36=54$.

4. **[3 балла]** Сколько целых значений x удовлетворяет неравенству $\sqrt{\frac{18-x}{2+x}}>-x$?

   Ответ: 20.

   Решение. ОДЗ неравенства – промежуток $(-2;18]$. Если $x\in(0;18]$, то левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна. Поэтому все значения x из промежутка $(0;\,18]$ – решения исходного неравенства. Пусть $x\in(-2;\,0]$. Тогда $x+2>0$ и исходное неравенство равносильно каждому из неравенств $\frac{18-x}{2+x}>x^2$, $x^3+2x^2+x-18<0$. Так как $x=2$ — корень многочлена $P(x)=x^3+2x^2+x-18$, то $P(x)$ можно представить в виде $(x-2)(x^2+px+q)$. Для нахождения неизвестных коэффициентов p и q можно воспользоваться либо делением многочленов уголком, а можно раскрыть скобки и приравнять коэффициенты многочленов друг другу: $x^3+2x^2+x-18=x^3+(p-2)x^2+(q-2p)x-2q$, откуда $2=p-2$, $1=q-2p$, $-18=-2q$, а значит, $p=4$, $q=9$ и $P(x)=(x-2)(x^2+4x+9)=(x-2)\left((x+2)^2+5\right)$. Следовательно, неравенство $P(x)<0$ означает, что $x<2$. Отсюда все значения $x\in(-2;\,0]$ – решения исходного неравенства, а его множество решений – объединение промежутков $(-2;\,0]$ и $(0;\,18]$, т.е. промежуток $(-2;\,18]$. Количество целых чисел на этом промежутке равно 20.

5. **[3 балла]** Решите уравнение $\frac{\cos 3x-\sin x}{\cos 5x-\sin 3x}=1$. В ответе укажите сумму корней уравнения, лежащих на отрезке $3\pi \leqslant x \leqslant 15\pi$, умноженную на $\frac{3}{\pi}$.

Ответ: 1 332.

Решение. Уравнение равносильно каждому из следующих уравнений

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)-\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)-\sin 3x}=1,\quad \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\,\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\,\sin\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)}=1,$$

откуда $\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=0$, или $\sin x\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=0$. Корни последнего уравнения $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$ удовлетворяют условию

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)\neq 0.$$

Для нахождения суммы корней уравнения на отрезке рассмотрим для начала каждую из серий по отдельности:

$$3\pi+4\pi+\ldots+15\pi=\frac{3\pi+15\pi}{2}\cdot 13=117\pi;$$

$$\left(\frac{\pi}{4}+\frac{9\pi}{3}\right)+\left(\frac{\pi}{4}+\frac{10\pi}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{\pi}{4}+\frac{44\pi}{3}\right)=36\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}(9+10+\ldots+44)=$$
$$=9\pi+\frac{\pi}{3}\cdot\frac{9+44}{2}\cdot 36=9\pi+318\pi=327\pi.$$

Остаётся заметить, что найденные серии решений не пересекаются (это можно установить, например, изобразив все решения на тригонометрической окружности). Значит, сумма всех решений на данном промежутке есть $117\pi+327\pi=444\pi$. В ответе необходимо записать число $\frac{3}{\pi}\cdot 444\pi=1\,332$.

6. **[3 балла]** Сколько целых значений x из интервала $0<x<100$ удовлетворяет неравенству $\frac{\log_8 x}{\log_8\left(\frac{x}{64}\right)}\geqslant\frac{2}{\log_8 x}+\frac{3}{\log_8^2 x-\log_8 x^2}$?

Ответ: 36.

Решение. Пусть $t=\log_8 x$. Тогда неравенство принимает вид

$$\frac{t}{t-2}\geqslant\frac{2}{t}+\frac{3}{t^2-2t}.$$

Перенося все члены в одну сторону, приводя к общему знаменателю и упрощая, имеем $\frac{(t-1)^2}{t(t-2)}\geqslant 0$, откуда $t\in(-\infty;0)\cup\{1\}\cup(2;+\infty)$. Возвращаясь к исходной переменной, получаем: $x\in(0;1)\cup\{8\}\cup(64;+\infty)$. Среди найденных решений промежутку $x<100$ принадлежат 36.

7. **[3 балла]** В треугольнике ABC проведена медиана AM. Точки F и T – проекции точки M на стороны AB и AC соответственно. Найдите площадь S треугольника ABC, если известно, что $AM=13$, $AF=2\sqrt{13}$, $AT=12$. В ответе запишите величину $23S$.

Ответ: 2 535.

Решение. Продолжим медиану AM за точку M и пусть D – такая точка на продолжении, что $AM=MD$. Обозначим также $\angle BAM=\alpha$, а $\angle CAM=\beta$. В четырёхугольнике $ABDC$ диагонали точкой пересечения делят друг друга пополам, поэтому он является параллелограммом. Известно, что каждая из диагоналей делит параллелограмм на два равных треугольника. Это означает, что площадь треугольника ABC равна площади треугольника ACD (так как обе площади равны половине площади параллелограмма).
Рассматривая прямоугольные треугольники AMF и ATF, можем выразить, что $\cos\alpha=\frac{AF}{AM}=$

$\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\beta = \frac{AT}{AM} = \frac{12}{13}$. Значит, $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin\beta = \frac{5}{13}$, $\sin(\pi-\alpha-\beta) = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{46}{13\sqrt{13}}$. Применяя к треугольнику ACD теорему синусов, имеем $\frac{AD}{\sin(\pi-\alpha-\beta)} = \frac{AC}{\sin\alpha}$; следовательно, $AC = 26\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} : \frac{46}{13\sqrt{13}} = \frac{507}{23}$. Окончательно получаем, что площадь треугольника ACD равна $A = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot AD\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\cdot\frac{507}{23}\cdot 26\cdot\frac{5}{13} = \frac{2\,535}{23}$. Значение выражения $23A$ есть $2\,535$.

8. **[3 балла]** Найдите сумму квадратов значений параметра t, при каждом из которых уравнение

$$(x^2+x+2t^2+1)^2 = 8t^2(x^2+x+1)$$

имеет ровно один корень.

Ответ: 0,75.

Решение. Сделаем замену $y = x^2+x+1$. Тогда получим уравнение $(y+2t^2)^2 = 8t^2y$, которое преобразуется к виду $(y-2t^2)^2 = 0$, откуда $y = 2t^2$. Значит, $x^2+x+1-2t^2 = 0$. Это уравнение имеет ровно одно решение тогда и только тогда, когда его дискриминант равен нулю. Получаем $1-4(1-2t^2) = 0$; $8t^2 = 3$; $t = \pm\sqrt{\frac{3}{8}}$. Значит, сумма квадратов искомых значений параметра t равна 0,75.